海军工程大学研究生系列教学用书

应用泛函分析

YINGYONG
FANHAN
FENXI

王公宝 李卫军 何汉林 编著

湖北科学技术出版社

ISBN 7-5352-2511-X
9 787535 225115 >
ISBN 7－5352－2511－X
G・616 定价:29.00元

应用泛函分析

●湖北科学技术出版社

王公宝 李卫军 何汉林 编著

YINGYONG
FANHAN
FENXI

应用泛函分析　　© 王公宝　李卫军　何汉林　编著

责任编辑：刘　虹　　封面设计：王　梅

出版发行：湖北科学技术出版社　　电话：86782508
地　　址：武汉市武昌黄鹂路75号　　邮编：430077

印　　刷：湖北科学技术出版社黄冈印刷厂　　邮编：438000

850mm × 1168mm　32开　10.5印张　253千字
2000年9月第1版　2000年9月第1次印刷

印数：0 001－1 000
ISBN 7-5352-2511-X / G · 616　　定价：29.00元

序

可以毫不夸张地说，泛函分析是改革开放以来我国高等教育中发展最快的学科之一，各个工科院校纷纷开设这门课程就是一个明证，这是在此以前不可能也根本做不到的。这一方面是和教育与科技的总体发展相适应的，另一方面也说明一个深刻的事实，泛函分析的思想与方法正在越来越强烈地渗透到从理科到工科、从工程到社会的各个学科中去。

泛函分析是20世纪初产生和发展起来的一门新兴数学学科，它的出现首先是分析数学内部发展的需要。当时数学分析的严密化已经完成，数学中不同的学科分支得到发展，数学本身已积累了较多的素材，通过分析和对比人们发现某些分支之间有许多共通之处，应用统一的方法去处理不同学科中类似的对象和问题成为人们的愿望和要求。另外一方面，在它产生与发展的进程中应用其思想方法解决数学物理和工程技术学科的问题取得成功，为这门学科的进一步发展注入了有生的力量。对于量子力学中一些算子的研究，电力工程中如何处理电脉冲的微积运算问题等等都属于这类问题。以今日我们所处的状况而言，泛函分析与这些学科的紧密联系不仅被保持下来了，而且有逐步发扬光大之势。

“20世纪是泛函分析的世纪。”(F. Browder)正因为泛函分析学科在20世纪经历了从产生到确立再到蓬勃发展的过程，到了今天泛函分析不仅有着巍峨的理论大厦，而且有着众多的理论分支。选取哪些基础内容作为向工科院校本科生或研究生讲解的材料，

是一个很费思量的问题。讲解过多则学员难以掌握，时间也不允许。讲解太少则不敷应用，学员对于整个学科的基础也没有较全面的了解，有时不免有避重就轻、浮光掠影之嫌。

本书作者为适应工科研究生的需要，在内容取舍上颇花费了一些功夫。首先，本书选取了比通常的同类教材更为丰富的内容加以讲解。其次，为了使学生接受这些内容，作者除了在第一章作了必要的实分析知识的铺垫之外，对于某些理论上难度较大的定理还采取部分介绍、部分证明的方法。虽然在别的教材中也曾见到过这种做法，但毕竟具体的剪裁有着很大的创新性。如此又可做到重点突出，既对于这一学科从整体上有所了解，又切切实实掌握对自己专业实用的东西。当然，对于具体的做法各人见仁见智，不会雷同，但毫无疑问这是一种有益的尝试。本书对概念的阐释，举例都能做到循循善诱，书的最后还讲述了有关理论在不动点问题，积分方程和最佳逼近问题等方面的应用，这对于读者是具有启发作用的。

编一本好的教材并不是一件容易的事，它是需要付出许多时间和精力的，有时也还要在实践中不断“磨练”，而它在培养科技人才方面的意义又是不可低估的。愿该书的出版为工科教学做出有益的贡献。

2000 年 5 月于珞珈山

目　　录

第一章　实分析基础

本章将简要地介绍数学分析与实变函数的一些基本知识，内容包括集合与映射、实数的完备性、一致连续与一致收敛、勒贝格测度与可测函数、勒贝格积分等，这些基本知识是学习泛函分析的必要准备.

§1　集合与映射

§1.1　集合及其运算

关于集合与集合运算的初步知识，我们在高等数学、线性代数及概率论等课程中已有所了解，这里再回顾一下集合的几种运算.

并集　设 A、B 是两个集合，由 A 的元素与 B 的元素的全体构成的新集合称为 A 与 B 的**并集**，记为 $A\cup B$. 于是有：$x\in A\cup B \Longleftrightarrow x\in A$ 或 $x\in B$.

设 $\{A_\lambda \mid \lambda\in I\}$ 为某一族确定的集合（这里 I 是指标 λ 的一个集合），称由各个 A_λ 的元素的全体构成的新集合为它们的并集，记为 $\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda$. 于是有：$x\in \bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda \Longleftrightarrow \exists\,\lambda_0\in I$ 使 $x\in A_{\lambda_0}$.

交集　设 A、B 是两个集合，由 A、B 的公共元素组成的新集合称为 A 与 B 的**交集**，记为 $A\cap B$. 于是有：$x\in A\cap B \Longleftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B$.

定义$\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda$为所有$A_\lambda(\lambda\in I)$的公共元素组成之集.即有$x\in\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda\Longleftrightarrow\forall\lambda\in I$有$x\in A_\lambda$.

定理 1.1 设B是一个集合,$\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$是一族集合,则有如下分配律:

(1) $B\cap(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda)$;

(2) $B\cup(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in I}(B\cup A_\lambda)$.

证 (1) 只需证明等式两边的集合互相包含即可.$\forall x\in B\cap(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda)$,有$x\in B$,$x\in\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda$,即$\exists\lambda_0\in I$使$x\in A_{\lambda_0}$,从而$x\in B\cap A_{\lambda_0}\subset\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda)$,故有

$$B\cap(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda)\subset\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda).$$

又$\forall x\in\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda)$,必$\exists\lambda_0\in I$使$x\in B\cap A_{\lambda_0}$,即有$x\in A_{\lambda_0}\subset\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda$,$x\in B$,从而$x\in B\cap(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda)$,所以

$$\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda)\subset B\cap(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda).$$

于是
$$B\cap(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in I}(B\cap A_\lambda).$$

(2) 证明留作习题.

差集及余集 设A、B是两个集合,定义A与B的**差集**$A\setminus B$为属于A而不属于B的元素的全体组成之集.于是$x\in A\setminus B\Longleftrightarrow x\in A$且$x\notin B$.

若$B\subset A$,则称差集$A\setminus B$为B关于A的**余(或补)集**.今后,所讨论的集合往往都是某个基本集X的子集,就简单地把差集$X\setminus A$叫做A的**余(或补)集**,记作A^C,即$A^C=X\setminus A(A\subset X)$.

显然,$A\setminus\varnothing=A$,$A\setminus A=\varnothing$,$\varnothing\setminus A=\varnothing$,$X^C=\varnothing$,$\varnothing^C=X$,$(A^C)^C=A$,若$A\subset B$,则$B^C\subset A^C$.

定理 1.2 设$\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$是一族集合(它们都是$X$的子集),则有如下 De Morgan 律:

(1) $(\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda)^C=\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda^C$；

(2) $(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C=\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C$.

证 只证(2),(1)的证明留作习题.

$\forall x\in(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C$,即 $x\in X$,$x\notin\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda$,于是 $\exists\lambda_0\in I$,$x\notin A_{\lambda_0}$,又 $x\in X$,故 $x\in A_{\lambda_0}^C\subset\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C$,从而 $(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C\subset\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C$. 反之,$\forall x\in\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C$,则 $\exists\lambda_0\in I$,使 $x\in A_{\lambda_0}^C$,即 $x\in X$,$x\notin A_{\lambda_0}$,而 $\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda\subset A_{\lambda_0}$,故 $x\notin\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda$,于是 $x\in(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C$,所以 $\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C\subset(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C$. 于是 $(\bigcap_{\lambda\in I}A_\lambda)^C=\bigcup_{\lambda\in I}A_\lambda^C$.

幂集 设 A 是一集合,由 A 的所有子集(包括空集及 A 本身)所构成的集,称为集合 A 的**幂集**,记作 $P(A)$. 例如若 $A=\{1,2,3\}$,则 A 的幂集为

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

容易知道,n 个元素的集合之幂集有 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$ 个元素. 基于这个事实,往往也把一般集 A 的幂集 $P(A)$ 记作 2^A,即 $P(A)\triangleq 2^A$. 应该注意的是空集 $\varnothing$ 的幂集仅含一个元素 $\varnothing$,即 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$,空集的幂集不再是空集.

笛卡尔积

定义 1.1 由 n 个具有给定次序的元素组成的序列,称为**有序 n 元组**,记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

有序 n 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中第 i 个元素 a_i,称为该有序 n 元组的第 i 个分量. 当 $n=2$ 时又称 (a,b) 为有序对. 两个有序 n 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是相等的,当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$. 因此 $(1,2)\neq(2,1)$.

定义 1.2 集合 A 与 B 的**笛卡尔**(Descartes)**积**定义为

$$A\times B\triangleq\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

它是有序对(a,b)的集合.

例 1.1 设 $A=\{0,1\}$, $B=\{0,2\}$,则

$$A\times B=\{(0,0),(0,2),(1,0),(1,2)\},$$
$$B\times A=\{(0,0),(0,1),(2,0),(2,1)\},$$

可见 $A\times B\neq B\times A$.

例 1.2 设 A、B 均为实数集 $\boldsymbol{R}$,则

$$\boldsymbol{R}^2 \triangleq \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\{(x,y)\mid x、y\in\boldsymbol{R}\}$$

$$\boldsymbol{R}^n \triangleq \underbrace{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}}_{n个}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

习惯上在讨论几何问题或使用几何的语言描述问题时,把集合的元素叫做点.今后我们将使用下列集合而不加解释:

$\boldsymbol{N}$ 为全体正整数的集;

$\boldsymbol{Z}$ 为全体整数的集;

$\boldsymbol{Q}$ 为全体有理数的集;

$\boldsymbol{R}$ 为全体实数的集;

$\boldsymbol{C}$ 为全体复数的集.

§1.2 映射

映射是现代数学中的一个基本概念.把实数集上的函数概念推广到一般的集合上就得到了映射的概念.

定义 1.3 设 A、B 是两个非空集合,f 是一个对应规则,它使每个 $x\in A$,对应惟一的元素 $y\in B$,记为 $y=f(x)$,则称 f 是 A 到 B 的一个**映射**,记作

$$f:A\to B \text{ 或 } A\xrightarrow{f}B.$$

A 叫做映射 f 的**定义域**,记为 $D(f)$,$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$称为映射 f 的**值域**.一般地 $f(A)\subset B$.我们把值域 $f(A)$ 又记作 $R(f)$,称$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in A\}\subset A\times B$ 为映射 f 的**图形**或**图像**.

当 B 为数域时,称映射 f 为**泛函**.

映射又称为**算子**或**变换**.两个映射 $f,g:A\to B$ 称为是相等的,若 $\forall a\in A,g(a)=f(a)$,记为 $f=g$.

通常称 $f:x\mapsto x(\forall x\in X)$为 X 上的**恒等映射**,记为 I_X.若 $X\subset Y$,称 $i:a\mapsto a(\forall a\in X)$为 X 到 Y 的一个**包含映射**.

例 1.3 设 $C^{(1)}[a,b]$表示$[a,b]$上所有具有一阶连续导数的函数的集合,$C[a,b]$表示$[a,b]$上全体实(复)值连续函数的集合,那么求导运算$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$就定义了一个映射 f,即

$f:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b],\ x(t)\mapsto x'(t).$

例 1.4 定积分 $f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\ (\forall x\in C[a,b])$定义了 $C[a,b]$ 上的一个实(或复)泛函.

定义 1.4 设 f 是A 到B 的一个映射,若 $f(A)=B$,即对 B 中的每个元 y,都存在 A 中元x(一个或几个),使 $f(x)=y$,则称 f 是一个**满射**;若对 $f(A)$ 中的每个元 y,都存在 A 中惟一的元x,使 $f(x)=y$,或者等价地对于 A 中任意两个不同元x_1 与 x_2,都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是一个**单射**;既是满射,又是单射,也就是说,对于 B 中的每个元y,都存在 A 中的惟一元x,使 $f(x)=y$,则称 f 是一个**双射**(或**一一对应,一一映射**).

例 1.3、例 1.4 中的映射均是满射而不是单射.

例 1.5 坐标变换(旋转及平移) $(x,y)\mapsto(x',y')$

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a\\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b\end{cases}\quad(\alpha,a,b\text{ 固定})$$

定义了一个映射 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$,这是双射.特别地,当 $\alpha=a=b=0$ 时,f 是恒等映射.

设有映射 $f:X\to Y$.若 $A\subset X$,记 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}\subset Y$,若 $B\subset Y$,记 $f^{-1}(B)=\{x\mid f(x)\in B\}\subset X$.当 $B=\{b\}$时,

$f^{-1}(\{b\})$简记为 $f^{-1}(b)$.

定理 1.3 设 X、Y 为非空集合，$f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset Y$，$A_\lambda\subset X(\lambda\in I)$，$B_\mu\subset Y(\mu\in T)$，$I$、$T$ 为指标集，则有下面的关系式成立：

(1) $A\subset f^{-1}(f(A))$，当 f 是单射时等式成立；

(2) $f(f^{-1}(B))\subset B$，当 f 是满射时等式成立；

(3) $f(\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in I}f(A_\lambda)$；

(4) $f(\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)\subset\bigcap\limits_{\lambda\in I}f(A_\lambda)$；

(5) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu)=\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$；

(6) $f^{-1}(\bigcap\limits_{\mu\in T}B_\mu)=\bigcap\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$；

(7) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$，$B_1,B_2\subset Y$.

证 仅证(1)和(5)，其余的留给读者.

(1) 对 $\forall a\in A$，因 $f(a)\in f(A)$，故 $a\in f^{-1}(f(A))$，于是

$$A\subset f^{-1}(f(A)),$$

若 f 是单射，那么对 $\forall x\in f^{-1}(f(A))$，有 $f(x)\in f(A)$，即 $\exists a\in A$，使 $f(x)=f(a)$，因 f 是单射，故 $x=a$，于是 $x\in A$，因此

$$f^{-1}(f(A))\subset A.$$

综上所述有 $A=f^{-1}(f(A))$.

(5) 对 $\forall a\in f^{-1}(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu)$，则 $f(a)\in\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu$，故 $\exists\mu_0\in T$，使 $f(a)\in B_{\mu_0}$，即 $a\in f^{-1}(B_{\mu_0})\subset\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$，因此

$$f^{-1}(\bigcup_{\mu\in T}B_\mu)\subset\bigcup_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu).$$

对 $\forall a\in\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$，则 $\exists\mu_0\in T$，使 $a\in f^{-1}(B_{\mu_0})$，$f(a)\in B_{\mu_0}$，于是 $f(a)\in\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu$，即 $a\in f^{-1}(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu)$，因此又有

$$\bigcup_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)\subset f^{-1}(\bigcup_{\mu\in T}B_\mu),$$

综上所述有 $f^{-1}(\bigcup\limits_{\mu\in T}B_\mu)=\bigcup\limits_{\mu\in T}f^{-1}(B_\mu)$.

定义 1.5 设有映射 $f:X\to Y, A\subset X$. 若映射 $\varphi:A\to Y$ 满足对 $\forall a\in A$，有 $\varphi(a)=f(a)$，则称 φ 为映射 f 在 A 上的**限制**，记作 $\varphi=f|_A$.

与定义 1.5 相反的概念是定义 1.6.

定义 1.6 设有映射 $\varphi:A\to B$，且 $A\subset X, B\subset Y$，若映射 $f:X\to Y$ 满足对 $\forall x\in A$，有 $f(x)=\varphi(x)$，则称映射 f 为 φ 从 A 到 X 的一个**延拓**.

譬如，$A\subset B$，包含映射 $i:A\to B$ 是恒等映射 I_B 在 A 上的限制，而恒等映射 I_B 可看成是包含映射 $i:A\to B$ 的一个延拓.

类似于复合函数概念，也可以定义映射的复合.

定义 1.7 设有映射 $f:A\to B$ 及 $g:B\to C$，由 f,g 确定的 A 到 C 的映射

$$h:a\mapsto g(f(a))\quad(\forall a\in A)$$

叫做映射 f 和 g 的**复合**，记为 $h=g\circ f$，即 $h(a)=g(f(a))$ $(\forall a\in A)$. 有时将 $g\circ f$ 简记为 gf.

容易验证关于映射的复合满足结合律：

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h).$$

定义 1.8 设有映射 $f:A\to B$，若存在映射 $g:B\to A$，使得 $g\circ f=I_A, f\circ g=I_B$，则称 f 是**可逆映射**，g 叫做 f 的**逆映射**.

定理 1.4 设 $f:A\to B$ 是可逆映射，则其逆映射是惟一的.

证 设 g_1、g_2 均为 f 的逆映射，则

$$g_i\circ f=I_A,\ f\circ g_i=I_B\quad(i=1,2).$$

故

$$g_1=g_1\circ I_B=g_1\circ(f\circ g_2)=(g_1\circ f)\circ g_2=I_A\circ g_2=g_2.$$

由于可逆映射 f 的逆映射是惟一的，今后就用符号 f^{-1} 表示 f 的逆映射.

定理 1.5 $f:A\to B$ 是可逆映射的充要条件是 f 是双射.

证 必要性 设 f 是可逆映射，f^{-1} 是 f 的逆映射，$\forall a_1$、$a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$. 因为

$$a_1 = I_A(a_1) = (f^{-1}f)(a_1) = f^{-1}(f(a_1)),$$
$$a_2 = I_A(a_2) = (f^{-1}f)(a_2) = f^{-1}(f(a_2)),$$

故 $$f^{-1}(f(a_1)) \neq f^{-1}(f(a_2)).$$

于是 $f(a_1) \neq f(a_2)$，所以 f 是单射.

$\forall b \in B$，因为 $b = I_B(b) = (f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b))$，即 $\exists f^{-1}(b) \in A$，使 $f(f^{-1}(b)) = b$. 所以 f 是满射.

综上所述 f 是双射.

充分性 设 $f: A \to B$ 是双射，则对 $\forall b \in B$，A 中有惟一元 a 使 $f(a) = b$，定义映射 $g: B \to A$ 为 $g(b) = a$，显然对 $\forall b \in B$，$f \circ g(b) = f(g(b)) = f(a) = b$，故 $f \circ g = I_B$，又对 $\forall a \in A$，$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = a$，故 $g \circ f = I_A$，由可逆映射的定义知 f 是可逆映射，且 g 是 f 的逆映射.

§1.3 可数集与不可数集

在抽象地研究集合的时候，集合中所含元素的多少是一个重要的概念. 有限集与无限集，可数集与不可数集，这些都是数学上常常碰到的概念. 如何判断一个集合所含元素的多少呢？对有限集而言，要知其元素的个数最直接的方法是把集合中元素一个一个地"数"出来，这等于将集合中各元素按某一方式给它们编号：$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，其中 $i \neq k$ 时，a_i 和 a_k 是不同的元素. 这样就把 A 和自然数列的某一个片断 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 一对一的对应起来，最后对应的一个自然数 n 显然就是 A 中的元素的个数. 有时候，我们并不需要确切地知道两个集合 A 与 B 所含元素的个数，但却要知道它们所含的元素谁多谁少，此时最行之有效的办法是将 A 的元素与 B 的元素对应起来. 为此引入下面的概念.

定义 1.9 设 A、B 是两个集合,如果存在一个从 A 到 B 的双射 f,则称 A 与 B 是**对等**的,记为 $A \sim B$.

容易验证,对等关系是一种等价关系,即 $A \sim A$;若 $A \sim B$,则 $B \sim A$;若 $A \sim B$,$B \sim C$,则 $A \sim C$.我们可以把彼此对等的集合归为一类.把两个彼此对等的集合称为具有相同的**势**(或**基数**),用 $\bar{A}$ 表示集合 A 的势.对有限集而言,两个集合具有相同的势,意味着它们所含元素个数相等."势"的概念是有限集合中元素"个数"的推广.

例 1.6 设 $\boldsymbol{N}_1 = \{2n \mid n \in \boldsymbol{N}\} \subset \boldsymbol{N}$.作映射 $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}_1$ 为 $f(n) = 2n$($\forall n \in \boldsymbol{N}$),易验证 f 为双射,故 $\boldsymbol{N} \sim \boldsymbol{N}_1$,或 $\bar{\boldsymbol{N}} = \bar{\boldsymbol{N}}_1$.

例 1.7 实数集 $\boldsymbol{R}$ 中的区间$(-1,1)$与 $\boldsymbol{R}$ 具有相同的势.因令 $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$($\forall x \in (-1,1)$),则 f 是$(-1,1)$到 $\boldsymbol{R}$ 的一个双射.设(a,b)为任意有限开区间,则(a,b)与$(-1,1)$等势,因 $g(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ 是$(-1,1)$到(a,b)的双射.

上面二例说明,无限集可以与其真子集具有相同的基数,而有限集与其真子集不可能建立一一对应,因而不可能具有相同的基数.可以证明:任何一个无限集必能与它的一个真子集等势,反之也成立.这正是无限集与有限集的本质区别.

定义 1.10 凡与自然数集 $\boldsymbol{N}$ 等势的集合称为**可数集**或**可列集**.一个集合是有限集或可数集时,称为至多可数.

上面的集合 $\boldsymbol{N}_1 = \{2n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ 是可数集.

当 A 是可数集时,存在 $\boldsymbol{N}$ 到 A 的双射 f,若令 $f(i) = a_i$($i = 1,2,\cdots,n,\cdots$),则 A 的元素可排列出来,即

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

可数集的势用 $\aleph_0$ 表示,读作阿列夫零.

例 1.8 有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 是可数集.

证 注意每个有理数 a 均可惟一写成分母为正整数,分子为整数的既约分数 $a=\frac{p}{q}, q>0$. 按和数 $|p|+q=n$ 依 n 由小到大排序(删去重复者),例如, $n=1$ 时的分数只有 $\frac{0}{1}$, $n=2$ 时的分数是 $\frac{1}{1}$ 和 $\frac{-1}{1}$, $n=3$ 的分数是 $\frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$ 等等,这样将一切有理数排列如下:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{-1}{1},\frac{2}{1},\frac{-2}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{-3}{1},\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\cdots$$

然后再按这一顺序与一切自然数集 $\mathbf{N}$ 建立一一对应关系,因此 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

为便于应用,我们简要地介绍两个集合的势之间的关系. 设 A、B 是两个集合,如果 A 不和 B 对等,但存在 B 的真子集 B_1,使 $A\sim B_1$,则称 A 比 B 有较小的势(或 B 比 A 有较大的势),并记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$(或 $\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$). 此外,我们用 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$ 表示 A 的势不超过 B 的势. 理论上已经证明,对两个集合 A、B,关系式 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 必有一个且仅有一个成立.

定理 1.6 可数集的任一子集至多可数.

证 设 A 是可数集, $B\subset A$. 将 A 的元素进行编号: $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,在这些元素中,假设 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$,是 B 的所有元素. 当它们只有有限多个时,那么 B 是有限集,否则可用数 $1,2,\cdots$ 对其进行编号, B 是可数集.

例 1.9 直线上一切互不相交的开区间构成的集至多可数. 事实上,每个开区间 (a,b) 内至少包含一个有理点,因此,只要使开区间与其中的某一有理点相对应,一切互不相交的开区间就与有理数集的一个子集一一对应,由定理 1.6 即知结论成立.

例 1.10 定义在区间上的单调函数的间断点至多可数.

证 不妨设 $f(x)$为单调增加函数. 设 x_0 为 $f(x)$的间断点,由高等数学知识知道, $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$及 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$均存在,且 $f(x_0-0)<f(x_0+0)$,故 x_0 对应 y 轴上的一个开区间$(f(x_0-0),f(x_0+0))$,而所有这些开区间都互不相交,由例 1.9 知结论成立.

定理 1.7 (1) 有限个或可数个可数集的并仍是可数集.

(2) 有限个可数集的笛卡尔积是可数集.

证 (1) 设 $A_1,A_2,\cdots$,是可数集,不妨设它们两两不相交(否则,令 $A_1^*=A_1,A_i^*=A_i-\bigcup\limits_{j=1}^{i-1}A_j$,则当 $i\neq j$ 时,$A_i^*\cap A_j^*=\varnothing$,且$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i^*$),而且并集$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=S$. 把 $A_1,A_2,\cdots$的一切元素排成如下的形式:

$$\begin{array}{l} A_1=\{a_{11}, \longrightarrow a_{12}, \quad a_{13}, \longrightarrow a_{14}, \cdots\}, \\ A_2=\{a_{21}, \quad a_{22}, \quad a_{23}, \quad a_{24}, \cdots\}, \\ A_3=\{a_{31}, \quad a_{32}, \quad a_{33}, \quad a_{34}, \cdots\}, \\ A_4=\{a_{41}, \quad a_{42}, \quad a_{43}, \quad a_{44}, \cdots\}, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{array}$$

把所有这些元素按对角线编号,则 S 可表示成为一个无穷序列

$a_{11},a_{12},a_{21},a_{31},a_{22},a_{13},a_{14},a_{23},a_{32},a_{41},a_{51},a_{42},a_{33},a_{24},a_{15},\cdots$,

故 S 是可数集.

(2) 设 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\},B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots\}$是可数集,则 $A\times B$ 的元素可以列表为无限矩阵形式:

$$\begin{array}{lll} (a_1,b_1), \longrightarrow & (a_1,b_2), & (a_1,b_3),\cdots \\ (a_2,b_1), & (a_2,b_2), & (a_2,b_3),\cdots \\ (a_3,b_1), & (a_3,b_2), & (a_3,b_3),\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

然后再将上述元素从(a_1,b_1)起按箭头所示顺序重新排列，这样可把 $A\times B$ 的所有元素排列出来，因而 $A\times B$ 可数.

归纳假设 $n=k$ 时(2)成立，即 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$ 是可数集，则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k\times A_{k+1}=(A_1\times A_2\times\cdots\times A_k)\times A_{k+1}$是两个可数集的笛卡尔积，因而也可数.

定理 1.8 任一无限集都包含可数子集.

证 设 M 是无限集，在 M 中任取一元素 a_1，由于 M 是无限集，可在 M 中找到异于 a_1 的元素 a_2. 假设已找到了 n 个不同的元素$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，由于 M 是无限集，$\exists a_{n+1}\in M\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，…，这样就能得到 M 的可数子集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$.

由定理 1.8 知，在无限集中，可数集是"最小的".

定义 1.11 不是可数集的无限集称为**不可数集**.

定理 1.9 区间$(0,1)$是不可数集.

证 首先$(0,1)$中每一实数 a 都可惟一地表示为十进位无穷小数：

$$a=0.a_1a_2a_3\cdots$$

的形式，其中各 a_n 是 $0,1,\cdots,9$ 中的一个数字，不全为 0，且不是从某个数之后都变为数字为 9 的数，称实数的这种表示为一个正规表示. 可以验证$(0,1)$中每一实数和它的正规表示是一一对应的.

现用反证法证明上面定理. 假设$(0,1)$中全体实数可排列成一个序列：

$$a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)},\cdots,a^{(n)},\cdots$$

将每个 $a^{(n)}$表示成正规无穷小数：

$$a^{(1)}=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\cdots,$$
$$a^{(2)}=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\cdots,$$
$$a^{(3)}=0.a_1^{(3)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

作十进位小数 $a=0.a_1a_2a_3\cdots$，其中 $a_i\neq a_i^{(i)}(i=1,2,\cdots)$，这是办得到的. 因为对任意的 i，如 $a_i^{(i)}=1$，令 $a_i=2$，如 $a_i^{(i)}\neq 1$，那么取 $a_i=1$ 就行了. 所作成的数 a 应该在区间 $(0,1)$ 中，但不会在数列 $a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)},\cdots$ 中，因为对于每个 n，$a_n\neq a_n^{(n)}$，故 $a\neq a^{(n)}$，这与 $\{a^{(1)},a^{(2)},\cdots\}=(0,1)$ 相矛盾，因此 $(0,1)$ 是不可数集.

由例 1.7 知 $\boldsymbol{R}$ 中的任一开区间 (a,b) 及 $\boldsymbol{R}$ 都与 $(0,1)$ 区间等势. 凡与区间 $(0,1)$ 对等的集的势称为连续统的势，记作$\aleph$（或 c），读作阿列夫.

可以证明，设集 A 的势为 μ，用 2^μ 表示幂集 $P(A)$ 的势，则 $2^\mu>\mu$. 因此没有"势最大"的无限集.

习　题　1.1

1. 证明 $B\cup(\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)=\bigcap\limits_{\lambda\in I}(B\cup A_\lambda)$.
2. 证明 $(\bigcup\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)^C=\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda^C$.
3. 证明 $f(f^{-1}(B))\subset B$，其中 $f:X\to Y,B\subset Y$，当 f 是满射时等式成立.
4. 证明 $f(\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda)\subset\bigcap\limits_{\lambda\in I}f(A_\lambda)$，其中 $f:X\to Y,A_\lambda\subset X(\lambda\in I)$. 举例说明等号可能不成立.
5. 试作一个由 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 的双射 f.
6. 证明整系数多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的全体是一可数集.

7. 整系数多项式的根称为代数数，证明代数数的全体是一可数集.

§2　实数与连续函数的某些性质

§2.1　实数的完备性

我们知道，实数可分为有理数与无理数. 有理数的全体称为有

理数系或有理数集.有理数在数轴上的对应点称为有理点,无理数对应的点称为无理点.有理数系的一个重要性质是它在实数系中的**稠密性**,就是说,对任意一个实数 x 和任意 $\varepsilon>0$,总能找到一个有理数 r,使得 $|x-r|<\varepsilon$.稠密性还等价于:对任意给定的实数 x,都存在有理数列 $\{r_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$.或者说,任意两个不同的实数之间至少存在着一个(因而有无限多个)有理数.

虽然如此,有理点并未布满整个数轴.在数轴上,有理点之间还有不是有理点的空隙(如$\sqrt{2}$等).有理数列的极限不一定是有理数(如$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限是 e,它不是有理数),我们称之为有理数系的不连续性或不完备性.而实数系却不同,它在数轴上是连续分布的,称之为实数系的连续性或完备性.

在这一小节中,我们简要地介绍关于实数系的六个等价定理(即定理 2.3~2.8),它们都刻画了实数(系)的完备性,有关等价性的证明从略.

定义 2.1 设 $A\subset\boldsymbol{R}$,如果存在 $c\in\boldsymbol{R}$,使得对 $\forall a\in A$,有 $a\leqslant c$,则称 c 是数集 A 的一个**上界**,称集合 A **有上界**.同样,如果存在 $d\in\boldsymbol{R}$.使得对 $\forall a\in A$,有 $a\geqslant d$,则称 d 是 A 的一个**下界**,称集合 A **有下界**.如果集合 A 既有上界也有下界,则称 A **有界**.

显然,若 c 是 A 的一个上界,且 $c_1\geqslant c$,则 c_1 也是 A 的一个上界.A 的上界 c 不一定在 A 中,譬如 $A=(0,1)$,1 是 A 的一个上界,但 $1\notin(0,1)$.

如果 A 有上界,且 A 的上界中有一个最小者 M,则称 M 是 A 的**上确界**,记作 $M=\sup A$.M 是 A 的上确界,即要满足两个条件:(1)M 是 A 的一个上界;(2)对 A 的任一个上界 c,有 $M\leqslant c$.由此知,如果 A 有上确界,则必是惟一的.

如果 A 无上界,可记作 $\sup A=+\infty$.

同样可以定义下确界.如果 A 有下界,且 A 的下界中有最大

者 m,则称 m 是 A 的**下确界**,记作 $m=\inf A$. m 是 A 的下确界就是说(1)m 是 A 的一个下界;(2)对 A 的任一下界 d,有 $d\leqslant m$. 如果 A 有下确界,则是惟一的.

如果 A 无下界,可记作 $\inf A=-\infty$.

定理 2.1 M 是 A 的上确界当且仅当 M 满足条件:(1)对 $\forall a\in A$,有 $a\leqslant M$;(2)对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists a\in A$,使 $a>M-\varepsilon$.

证 设 M 是 A 的上确界,则 M 是 A 的一个上界,条件(1)成立. 若(2)不成立,则 $\exists\varepsilon_0>0$,对 $\forall a\in A$,都有 $a\leqslant M-\varepsilon_0$,即 $M-\varepsilon_0$ 是 A 的一个小于 M 的上界,这与 M 是 A 的最小上界相矛盾,故条件(2)成立.

反之,当(1)成立时,表明 M 是 A 的一个上界. 设 c 是 A 的任一上界,若 $c<M$,令 $\varepsilon=M-c>0$,由条件(2), $\exists a\in A$,使 $a>M-\varepsilon=M-(M-c)=c$,这与 c 是 A 的上界相矛盾,故必有 $c\geqslant M$,于是 M 是 A 的最小上界即上确界.

在以上的条件(2)中,令 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$,则 $\exists a_n\in A$,使得 $a_n>M-\dfrac{1}{n}$,另一方面 $a_n\leqslant M$,故 $a_n\to M(n\to\infty)$,于是有如下推论.

推论 2.1 设 M 是 A 的一个上界,则 M 是 A 的上确界的充要条件是存在 A 中序列 $\{a_n\}$,使得 $a_n\to M(n\to\infty)$.

对于下确界的情形,有类似的结论.

定理 2.2 m 是 A 的下确界,当且仅当 m 满足条件:(1)对 $\forall a\in A$,有 $a\geqslant m$;(2)对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists a\in A$,使 $a<m+\varepsilon$.

如果 m 是 A 的一个下界,则 m 是 A 的下确界的充要条件是存在 A 中序列 $\{a_n\}$,使得 $a_n\to m(n\to\infty)$.

例 2.1 考虑数集 $A=\{x\mid x^2<2, x\in\boldsymbol{Q}\}$. 在实数范围内,$A$ 有上确界$\sqrt{2}$. 事实上,对 $\forall x\in A$,由 $x^2<2$ 知 $x<\sqrt{2}$,即$\sqrt{2}$是 A 的一个上界. 对 $\forall\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),由有理数的稠密性, $\exists r\in\boldsymbol{Q}$,

使得$\sqrt{2}-\varepsilon<r<\sqrt{2}$，$r^2<2$，故 $r\in A$，由定理 2.1 即知$\sqrt{2}$是 A 的上确界．可以证明，A 在有理数范围内无上确界，即任何一个有理数 r_0 都不能成为 A 的上确界．

一般，在实数范围内有如下的确界存在定理，我们不加证明地叙述如下：

定理 2.3(确界存在定理)　任何有上界的非空实数子集 A 必有上确界．任何有下界的非空实数子集必有下确界．

如果集合 A 的上(下)确界属于 A，则此上(下)确界即是 A 的最大(小)值．

由确界存在定理可得下面的定理．

定理 2.4(单调有界定理)　单调有界数列必有极限．

证　仅就数列$\{x_n\}$单调增加且有上界证明，对于单调减少且有下界的情形证明类似．考虑由数列$\{x_n\}$的项组成的集 A(注意 A 与数列$\{x_n\}$的区别，如数列 $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$的项组成的集是$\{-1,1\}$)．$A$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中子集，由$\{x_n\}$有上界知集 A 有上界，由确界存在定理，A 有上确界 a．下面证明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

因 a 是 A 的上确界，故对 $\forall n$，都有 $x_n\leqslant a$，由定理 2.1，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_N\in A$，使 $x_N>a-\varepsilon$．注意$\{x_n\}$单调增加，当 $n>N$ 时，$x_n\geqslant x_N>a-\varepsilon$，于是当 $n>N$ 时，恒有 $a-\varepsilon<x_N\leqslant x_n\leqslant a<a+\varepsilon$，即$|x_n-a|<\varepsilon$，由极限定义

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

由定理的证明可看出，单调增加有界数列的上确界即是该数列的极限．

由单调有界定理，可以证明以下两个定理：

定理 2.5(区间套定理)　设$\{[a_n,b_n]\}(n=1,2,\cdots)$是一列闭区间，$a_n<b_n$，如果

(1) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,

则存在惟一的 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,并且有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$.

定理 2.6(Bolzano-Weierstrass 列紧性定理) 任何有界实数列必有收敛的子列.

定义 2.2 设 $E=\{\Delta_\lambda\mid\lambda\in T,\Delta_\lambda$ 是区间$\}$,I 是某一区间,若 $I\subset\bigcup\limits_{\lambda\in T}\Delta_\lambda$,则称区间集 E 覆盖了 I,也说区间集 E 是区间 I 的一个**覆盖**.若 E 是有限集,便称 E 为**有限覆盖**.若 E 的每个元素都是开区间,便称 E 为**开覆盖**.设 $G\subset E$,且 G 也是 I 的一个覆盖,则称 G 为 E 的**子覆盖**,当 G 的元只有有限个时,称 G 为**有限子覆盖**.

例 2.2 设 $I=(0,1)\subset\mathbf{R}$,$E_1=\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},1\right),\left(\frac{2}{3},2\right)\right\}$.则 E_1 显然是 I 的一个覆盖,$G=\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},1\right)\right\}$是 E_1 的子覆盖,G 是 I 的一个开覆盖.令 $E_2=\left\{\left(0,1-\frac{1}{n}\right)\middle|\,n=2,3,\cdots\right\}$,由于$(0,1)\subset\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}\left(0,1-\frac{1}{n}\right)$,故 E_2 也是 $I=(0,1)$的开覆盖.显然,E_2 中任意有限个元组成的子集不可能覆盖$(0,1)$,故 E_2 没有有限的子覆盖.

定理 2.7(Heine-Borel 有限覆盖定理) 设 $E=\{(a_\lambda,b_\lambda)\mid\lambda\in T\}$是有界闭区间$[a,b]$的任一开覆盖,则 E 必有有限子覆盖,即存在 E 中的有限个开区间$(a_{\lambda_i},b_{\lambda_i})(i=1,2,\cdots,n)$,使$[a,b]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_{\lambda_i},b_{\lambda_i})$.

证略.

定义 2.3 设$\{x_n\}$为一数列,若对任意给定的 $\varepsilon>0$,必存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $n,m>N$ 时,有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon$$

恒成立,则称$\{x_n\}$为 **Cauchy 列**或**基本列**.

例 2.3 任一收敛数列$\{x_n\}$都是 Cauchy 列.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对$\forall\varepsilon>0$,必$\exists N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$;当 $m>N$ 时,$|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$,故当 $n,m>N$ 时,$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-a|+|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$,于是$\{x_n\}$是 Cauchy 列.

例 2.4 任一 Cauchy 列$\{x_n\}$都是有界的.

证 对 $\varepsilon_0=1$,由$\{x_n\}$是 Cauchy 列,$\exists N\in\mathbf{N}$,当 $m,n>N$ 时,$|x_n-x_m|<1$,特别有$|x_n-x_{N+1}|<1$.

所以当 $n>N$ 时,$|x_n|=|x_n-x_{N+1}+x_{N+1}|\leqslant|x_n-x_{N+1}|+|x_{N+1}|<1+|x_{N+1}|$,于是对任意 n,有

$$|x_n|\leqslant\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|x_{N+1}|\},$$

故$\{x_n\}$有界.

定理 2.8(实数系完备性定理) $\boldsymbol{R}$ 中数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是$\{x_n\}$是 Cauchy 列.

证 必要性见例 2.3,现证充分性. 设$\{x_n\}$是 Cauchy 列,由例 2.4 知$\{x_n\}$是有界数列. 由定理 2.6 知$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$,则对$\forall\varepsilon>0$,$\exists K\in\mathbf{N}$,当 $k>K$ 时,$|x_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$,又$\{x_n\}$是 Cauchy 列,故对上述 $\varepsilon>0$,$\exists N_1\in\mathbf{N}$,当 $k>N_1$,$m>N_1$ 时,$|x_m-x_k|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $N=\max\{K,N_1\}$,当 $k>N$ 时,由于 $n_k\geqslant k>N$,故$|x_k-a|\leqslant|x_k-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$,由数

列极限的定义知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

定理2.8常称为Cauchy收敛准则.

§2.2 开集与闭集

定义2.4 设U是$\boldsymbol{R}$中的点集,$a\in\boldsymbol{R}$,称包含a的任一开区间(α,β)为点a的**邻域**.设$a\in U$,如果存在a的邻域(α,β),满足$a\in(\alpha,\beta)\subset U$,则称$a$是$U$的**内点**.如果点集$U$中的每一点都是它的内点,则称$U$为**开集**.

显然,直线上任何开区间都是开集.集合$(0,1)\cup(2,3)$也是开集.规定空集$\varnothing$是开集.

定理2.9 开集具有下列性质

(1) $\varnothing$与$\boldsymbol{R}$都是开集;

(2) 任意多个开集的并是开集;

(3) 有限多个开集的交是开集.

证 (1) 显然.

(2) 设$\{G_\lambda \mid \lambda\in I\}$是任一开集族,令$G=\bigcup\limits_{\lambda\in I} G_\lambda$,不妨设$G\neq\varnothing$,对$\forall x\in G$,则必$\exists\lambda_0\in I$,使$x\in G_{\lambda_0}$,由$G_{\lambda_0}$是开集,故$x$是$G_{\lambda_0}$的内点,因此存在$x$的一个邻域$(\alpha,\beta)$,使$x\in(\alpha,\beta)\subset G_{\lambda_0}\subset G$,$x$也是$G$的内点,所以$G$是开集.

(3) 设$G_1,G_2,\cdots,G_n$是n个开集,令$G=\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$.不妨设$G\neq\varnothing$,对$\forall x\in G$,则$x\in G_k\ (k=1,2,\cdots,n)$.于是对每个$k$,都存在$x$的一个邻域$(\alpha_k,\beta_k)$,使$x\in(\alpha_k,\beta_k)\subset G_k\ (k=1,2,\cdots,n)$.令

$$\alpha=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{\alpha_k\},\quad \beta=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{\beta_k\}.$$

显然$\alpha<\beta$,且$x\in(\alpha,\beta)\subset(\alpha_k,\beta_k)\subset G_k$,从而$x\in(\alpha,\beta)\subset\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k=G$,这表明$x$也是$G$的内点,故$G$是开集.

例2.5 设 $G_k=\left(\frac{-1}{k},\frac{1}{k}\right)$ $(k=1,2,\cdots,n,\cdots)$，令 $G=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$，易验证 $G=\{0\}$，G 不是开集. 而每个 G_k 都是开集. 本例表明无限个开集的交不一定是开集.

定义 2.5 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中的点集，$P_0\in\mathbf{R}$，如果 P_0 的任一邻域内都含有无穷多个 E 的点，则称 P_0 为 E 的一个**聚点**(或**极限点**).

直观上看，P_0 是 E 的聚点，就好像 E 中有无限多个点聚集在 P_0 的附近. 显然，E 的内点必为 E 的聚点，但 E 的聚点却不一定是 E 的内点，E 的聚点可以属于 E 也可以不属于 E，请看下面二例.

例 2.6 区间 $(0,1)$ 内的每个点都是它的聚点，而且 0 与 1 也是它的聚点，但 $0,1\notin(0,1)$.

例 2.7 设 $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，易验证 0 是 E 的聚点，而且是 E 的惟一聚点，$0\notin E$.

定理 2.10 下面的三个陈述是等价的：

(1) P_0 是 E 的聚点；

(2) P_0 的任一邻域内，至少含有一个属于 E 而异于 P_0 的点；

(3) 存在由 E 中互异的点构成的点列 $\{P_n\}$，使 $P_n\to P_0$ $(n\to\infty)$.

证 由(1)导出(2)及由(3)导出(1)是显然的，现证由(2)导出(3).

由假定，在 (P_0-1,P_0+1) 中至少有一点 $P_1\in E$，$P_1\neq P_0$，令 $\delta_1=\min\left\{|P_1-P_0|,\frac{1}{2}\right\}$，则在 $(P_0-\delta_1,P_0+\delta_1)$ 中至少有一点 $P_2\in E$，$P_2\neq P_0$，显然 $P_2\neq P_1$. 令 $\delta_2=\min\left\{|P_2-P_0|,\frac{1}{3}\right\}$，则在

$(P_0-\delta_2, P_0+\delta_2)$中又至少有一点 $P_3\in E$，$P_3\neq P_0$，显然 $P_3\neq P_1, P_2$，这样无限继续下去，便得到点列$\{P_n\}$，它显然满足要求.

定义 2.6 设 $E\subset \boldsymbol{R}$，$P_0\in \boldsymbol{R}$，如果 P_0 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P_0 为 E 的**边界点**；如果 $P_0\in E$，但 P_0 不是 E 的聚点，则称 P_0 为 E 的**孤立点**.

由定理 2.10 易知：P_0 是 E 的孤立点的充要条件是：存在 P_0 的某邻域(α,β)，使$(\alpha,\beta)\cap E=\{P_0\}$.

E 的孤立点一定是E 的边界点；E 的边界点不是聚点便是孤立点；E 的聚点不是内点便一定是边界点.

定义 2.7 设 $E\subset \boldsymbol{R}$，有如下概念：

(1) E 的全体内点所成的集合，称为 E 的**内部**，记作 $\mathring{E}$；

(2) E 的全体边界点所成的集合，称为 E 的**边界**，记为∂E；

(3) E 的全体聚点所成的集合，称为 E 的**导集**，记为 E'；

(4) $E\cup E'$称为E 的**闭包**，记为 $\bar{E}$.

由定义，对任意集 E，都有 $\mathring{E}\subset E\subset \bar{E}$.

在例 2.6 中，记 $E=(0,1)$，则 $\mathring{E}=(0,1)$，$\partial E=\{0,1\}$，$E'=[0,1]$，$\bar{E}=[0,1]$. 在例 2.7 中，$E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，$\mathring{E}=\varnothing$，$\partial E=E\cup\{0\}$，$E'=\{0\}$，$\bar{E}=E\cup\{0\}$. 若 E 是非空有限集，则 $\mathring{E}=\varnothing$，$\partial E=E$，$E'=\varnothing$，$\bar{E}=E$.

下面定理告诉我们什么时候 $E'\neq\varnothing$.

定理 2.11(Bolzano-Weierstrass 聚点原理) $\boldsymbol{R}$ 中任一有界无限点集E 至少有一个聚点.

证略.

定理 2.12 设 $E\subset \boldsymbol{R}$，则下面三个陈述是等价的：

(1) $x\in\bar{E}$；

(2) x 的任一邻域中都有 E 的点；

(3) 存在点列$\{x_n\}\subset E$，使 $x_n\to x(n\to\infty)$.

证 (1)⇒(2) 设 $x\in\bar{E}$. 若 $x\in E$,则(2)显然成立. 若 $x\notin E$,则 $x\in E'$. 由聚点定义知(2)成立.

(2)⇒(3) 设 x 的邻域$\left(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right)$中有 E 的点 x_n($n=1,2,\cdots$),因 $|x_n-x|<\frac{1}{n}$,故 $x_n\to x(n\to\infty)$.

(3)⇒(1) 设 $x_n\in E$ 且 $x_n\to x(n\to\infty)$. 若 $x\in E$,则 $x\in\bar{E}$. 若 $x\notin E$,则 $x\neq x_n(n=1,2,\cdots)$,对 x 的任意邻域(α,β),记 $\varepsilon=\min\{x-\alpha,\beta-x\}$,由 $x_n\to x$ 知 $\exists N\in\boldsymbol{N}$,当 $n>N$ 时,$|x_n-x|<\varepsilon$,即 $x_n\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$,由定理 2.10 之(2)知 x 是 E 的聚点,即 $x\in E'$,从而 $x\in\bar{E}$.

定义 2.8 设 $E\subset\boldsymbol{R}$,如果 E 的余集 $E^c=\boldsymbol{R}\setminus E$ 是开集,则称 E 为**闭集**.

由闭集的定义可知:闭集的余集是开集,开集的余集是闭集.

由定理 2.9 及 De Morgan 律(定理 1.2)容易得到下面的定理.

定理 2.13 (1) 空集 $\varnothing$ 与 $\boldsymbol{R}$ 是闭集;

(2) 任意多个闭集的交集是闭集;

(3) 有限多个闭集的并集是闭集.

应该注意的是,无限多个闭集的并不一定是闭集.

定理 2.14 设 E 是 $\boldsymbol{R}$ 中非空子集,则以下四个陈述是等价的:

(1) E 是闭集;

(2) $E'\subset E$;

(3) $E=\bar{E}$;

(4) 对 E 中的每个收敛点列 $\{x_n\}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$,则 $x\in E$.

证 (1)⇒(2) 用反证法. 设 $x\in E'$,若 $x\notin E$,则 $x\in E^c$,由 E 是闭集,知 E^c 是开集,故必存在 x 的邻域(α,β),使 $x\in(\alpha,\beta)$

$\subset E^c$，这与 x 是 E 的聚点相矛盾，因此 $x\in E$.

(2)⇒(3)　由 $E'\subset E$ 及 $\overline{E}=E\cup E'$ 知 $\overline{E}=E$.

(3)⇒(4)　设 $\{x_n\}$ 是 E 中收敛点列，$x_n\to x(n\to\infty)$. 由定理 2.12，$x\in\overline{E}=E$.

(4)⇒(1)　若 E^c 不是开集，则 $\exists x\in E^c$，x 不是 E^c 的内点，故对每个 n，$\left(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right)\not\subset E^c$. 即 $\exists x_n\in\left(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right)$，$x_n\notin E^c$，从而 $x_n\in E$，显然 $x_n\to x(n\to\infty)$，由条件(4)，$x\in E$，这与 $x\in E^c$ 相矛盾，故 E^c 是开集，从而 E 是闭集.

推论 2.2　若 $E'=\varnothing$，则 E 是闭集.

我们知道，开区间是开集. 任意多个开区间的并也是开集. 那么，任何一个开集是否都能表示成一些开区间的并呢？

定义 2.9　设 G 是直线 $\boldsymbol{R}$ 上的有界开集，如果开区间 (α,β) 满足条件：(1) $(\alpha,\beta)\subset G$；(2) α、$\beta\notin G$. 则称 (α,β) 是开集 G 的**一个构成区间**.

例如，$G=(0,1)\cup(2,3)$，$(0,1)$、$(2,3)$ 都是 G 的构成区间.

引理 2.1　设 G 为 $\boldsymbol{R}$ 中有界开集，则对任意 $x_0\in G$，必有 G 的一个构成区间 (α,β)，使 $x_0\in(\alpha,\beta)$.

证略.

定理 2.15（开集的构造定理）　设 G 为 $\boldsymbol{R}$ 中有界非空开集，则 G 可以表示为至多可数个互不相交的构成区间之并，即

$$G=\bigcup_{k\in I}(\alpha_k,\beta_k),$$

其中 I 为有限的或可数的指标集.

证　由引理 2.1，对 $\forall x\in G$，都有一个 G 的构成区间 (α_x,β_x)，使 $x\in(\alpha_x,\beta_x)\subset G$，故 $G=\bigcup_{x\in G}(\alpha_x,\beta_x)$. 又因 G 中不同的点 x_1 与 x_2 所对应的构成区间 $(\alpha_{x_1},\beta_{x_1})$ 与 $(\alpha_{x_2},\beta_{x_2})$ 要么互相重合，要么互不相交. 事实上，若 $(\alpha_{x_1},\beta_{x_1})$ 与 $(\alpha_{x_2},\beta_{x_2})$ 不重合，且 $(\alpha_{x_1},$

$\beta_{x_1})\cap(\alpha_{x_2},\beta_{x_2})\neq\varnothing$，则这两个构成区间的端点总有一个含于另一个构成区间中，例如不妨设 $\beta_{x_1}\in(\alpha_{x_2},\beta_{x_2})$，于是 $\beta_{x_1}\in G$，这与 $(\alpha_{x_1},\beta_{x_1})$ 是构成区间相矛盾. 于是 G 可表示为一列互不相交的构成区间的并集，由例 1.9，这些区间至多有可数个.

下面举一个重要的例子——康托(Cantor)三分集.

例 2.8 Cantor 集.

将区间[0,1]三等分，去掉中间的开区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，剩下两个闭区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$. 再把这两个闭区间各三等分，去掉各自中间的开区间，即 $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$，$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$. 一般地，当进行到第 n 次时，一共去掉 2^n-1 个开区间，剩下 2^n 个长度是 3^{-n} 的互相隔离的闭区间，再将这 2^n 个闭区间各三等分，并去掉各自中间的开区间，如此继续下去，就从[0,1]去掉了可数个互不相交而且没有公共端点的开区间，剩下的点所构成的集合称为康托集，记为 P_0.

康托集具有下列基本性质：

(1) P_0 是闭集.

事实上，$P_0^c=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\cup\cdots$，它显然是一个开集，因此 P_0 是闭集.

(2) P_0 是不可数集，且 $\overline{\overline{P_0}}=\aleph$.

§2.3 函数的一致连续性与函数列的一致收敛性

在微积分学中已介绍过的区间上的连续函数的概念，可以推广到 $\boldsymbol{R}$ 的一般子集 E 上.

定义 2.10 设 E 是直线 $\boldsymbol{R}$ 上的点集，$f(x)$是定义在 E 上的函数(即 $f:E\to\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$). $x_0\in E$，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x\in E$，且$|x-x_0|<\delta$ 时，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$**在 x_0 处连续**. 如果 $f(x)$在 E 中每一点都连续，那么称 $f(x)$**在集 E 上连续**.

下面的定理表明，闭区间上的连续函数的很多性质，也可以推广到有界闭集上的连续函数上去.

定理 2.16 设 E 是 $\boldsymbol{R}$ 中有界闭集，f 是定义在E 上的实值连续函数，则 f 在集E 上必有界，并且能取得它的最大值与最小值.

函数 f 在一点 x_0 连续是局部定义的，即对 $\forall\varepsilon>0$，可找到一个 $\delta>0$，使$|x-x_0|<\delta$ 且$x\in E$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，此处的 δ 不仅与ε 有关，通常也与 x_0 有关，即对同一个 ε，当 x_0 在 E 内变化时，δ 也要随着变化，因此 δ 可看成ε 与 x_0 的函数，记作 $\delta(\varepsilon,x_0)$.

如果对于 E 中的所有点，能求出一个公共的 δ，即仅与 ε 有关的$\delta(\varepsilon)$，使$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，那么就说 f 在E 上是一致连续的，具体定义如下.

定义 2.11 设 $f:E\to\boldsymbol{R}$(或 $\boldsymbol{C}$)($E\subset\boldsymbol{R}$)，如果对于$\forall\varepsilon>0$，都能找到 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$($\delta(\varepsilon)$与 x 无关)，使得对 $\forall x_1,x_2\in E$，只要$|x_1-x_2|<\delta$，就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 成立，则称 f 在集E 上**一致连续**.

f 在E 上的连续性与一致连续性是两个不同的概念，前者只要求对于 E 中各点能分别找到适合不等式$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 的$\delta(\varepsilon,x_0)$就行了，它描述的是函数在各点的局部性态；而后者则要求对$\forall\varepsilon>0$，对于 E 中的所有点，能找到共同的 $\delta(\varepsilon)$，它描述了函数 f 在集合E 上的整体性态. 由定义可知，如果 f 在E 上一

致连续,则它在 E 上连续,但其逆一般不成立.

例 2.9 设 $f(x)=\frac{1}{x}, E=(0,1)$,则 f 在 E 上连续,但不一致连续.

证 由高等数学知识易知 $f(x)$ 在 E 上连续.

下面采用反证法证明 f 在 E 上不是一致连续的. 假设 f 在 E 上一致连续,则对 $\varepsilon_0=1$,必存在 $\delta(\varepsilon_0)>0$,使对 $\forall x_1,x_2\in(0,1)$,只要 $|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon_0)$,就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<1$. 取自然数 n 充分大,使 $\frac{1}{n}<\delta(\varepsilon_0)$,取 $x_1=\frac{1}{n}, x_2=\frac{1}{2n}$,则 $x_1,x_2\in E$ 且 $|x_1-x_2|=\frac{1}{2n}<\delta(\varepsilon_0)$,此时应有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_0=1$,但 $|f(x_1)-f(x_2)|=|n-2n|=n\geqslant 1$,矛盾. 故 f 在 E 上不是一致连续的.

由例 2.9 的证明可看出:要证明函数 f 在 E 上不是一致连续的,只需证明存在常数 $\varepsilon_0>0$ 及 E 中两个点列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$,满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$,但 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0\ (n=1,2,\cdots)$.

例 2.10 设 $f(x)=x^2, E=(-\infty,+\infty)$,证明 f 在 E 上连续但不一致连续.

证 由微积分学中的结论,函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 对 $\varepsilon_0=1$,取 $x_n=n+\frac{1}{n}, y_n=n\ (n=1,2,\cdots)$,则 $x_n,y_n\in E(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $|f(x_n)-f(y_n)|=\left|\left(n+\frac{1}{n}\right)^2-n^2\right|=2+\frac{1}{n^2}>1=\varepsilon_0$,故 $f(x)=x^2$ 在 E 上不是一致连续的.

定理 2.17 设 E 是 $\boldsymbol{R}$ 中有界闭集,f 是 E 上的连续函数,则 f 在 E 上一致连续.

证 采用反证法.假设 f 在 E 上不一致连续,则必存在某个 $\varepsilon_0>0$,对任何 $\delta>0$,都能找到 $x,y\in E$,满足 $|x-y|<\delta$,但 $|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon_0$.

特别,对 $\delta_n=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,都存在 $x_n,y_n\in E$,满足 $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$,但 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$,于是得 E 中两个点列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$.由 E 有界知 $\{x_n\}$ 有界,由列紧性定理知 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$,设 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$,由 E 是闭集知 $x_0\in E$.因 $|x_{n_k}-y_{n_k}|<\frac{1}{n_k}\to 0(k\to\infty)$,故 $y_{n_k}\to x_0$.由 f 在 x_0 处连续易知 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}f(y_{n_k})=f(x_0)$,这与 $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0$ $(k=1,2,\cdots)$相矛盾,从而 f 在 E 上一致连续.

设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在点集 $E\subset\boldsymbol{R}$ 上的一个函数序列.对于 E 中每一个固定的点 x,$\{f_n(x)\}$ 是一个数列,如果它是收敛的数列,即收敛到一个数,则此极限值依赖于 x,记为 $f(x)$.如果对 E 中每个点 x,数列 $\{f_n(x)\}$ 都收敛,则在 E 上定义了一个函数 $f(x)$,称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上处处收敛于 $f(x)$,并称 $f(x)$ 是函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的**极限函数**,记作

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\qquad(\forall x\in E).$$

用"$\varepsilon-N$"说法是:

$\forall x\in E$,对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N(\varepsilon,x)\in\boldsymbol{N}$,当 $n>N(\varepsilon,x)$ 时,就有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

这里的 $N(\varepsilon,x)$ 不但与 ε 有关,通常与点 x 也有关.当 x 不同时,对同一个 ε,需要找到的 N 也可能不同,如果对于 E 中的所有点 x,都能找到一个公共的 $N(\varepsilon)$(它仅与 ε 有关)使 $n>N(\varepsilon)$ 时,$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对一切 $x\in E$ 恒成立,那么就称 $\{f_n(x)\}$

在 E 上一致收敛于 $f(x)$，具体定义如下：

定义 2.12 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在点集 $E\subset \mathbf{R}$ 上的一个函数序列，如果存在 E 上的一个函数 $f(x)$，对于 $\forall \varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)\in \mathbf{N}$，只要 $n>N(\varepsilon)$，不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in E$ 成立，就称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上**一致收敛**于 $f(x)$，$f(x)$ 称为 $\{f_n(x)\}$ 的**一致收敛极限**，记作 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ $(n\to\infty, x\in E)$.

显然，若 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$，则 $\{f_n(x)\}$ 必在 E 上处处收敛于 $f(x)$. 反过来结论不真.

例 2.11 设函数序列 $f_n(x)=x^n, x\in E=[0,1]$，易知

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant x<1,\\ 1, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

所以极限函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant x<1,\\ 1, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

$\{f_n(x)\}$ 在 E 上处处收敛于 $f(x)$，但不是一致收敛于 $f(x)$. 事实上，取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{3}$，则对于 $\forall n\geqslant 1, x_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}}\in[0,1], f(x_n)=0$，但 $|f_{n+1}(x_n)-f(x_n)|=\left|\dfrac{1}{2}-0\right|>\varepsilon_0$，故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. 注意到每个 $f_n(x)=x^n$ 在 $[0,1]$ 都是连续函数，但极限函数 $f(x)$ 却在 $x=1$ 处不连续，因此在 $[0,1]$ 上不连续.

一致收敛的函数序列有很多重要性质，下面介绍其中最常用的两条.

定理 2.18 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上连续函数列，且在 E 上一致收敛于 $f(x)$，则极限函数 $f(x)$ 也在 E 上连续.

证 对 $\forall x_0 \in E$，需证 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 由已知条件，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，对每个 $x \in E$，都有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$，特别有 $|f(x)-f_{N+1}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$，$|f_{N+1}(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ 成立. 又因 $f_{N+1}(x)$ 在 E 上连续，故对 $x_0 \in E$，$\exists \delta>0$，使得当 $x \in E$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f_{N+1}(x)-f_{N+1}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$，从而当 $x \in E$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)| \leqslant & |f(x)-f_{N+1}(x)|+|f_{N+1}(x)-f_{N+1}(x_0)| \\
& +|f_{N+1}(x_0)-f(x_0)| \\
< & \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

故 $f(x)$ 在 x_0 连续.

本定理表明，一致收敛性能将函数列 $\{f_n(x)\}$ 中各函数的连续性传递给极限函数 $f(x)$.

定理 2.19 设 $\{f_n(x)\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数列，若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则

$$
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x
$$

或写成

$$
\int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.
$$

证 由定理 2.18，极限函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 因为

$$
\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-f_n(x)|\mathrm{d}x,
$$

已知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，故对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，对一切 $x \in E$，都有 $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$，

从而当 $n > N(\varepsilon)$ 时，$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}x = \varepsilon$，所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

本定理表明，在一致收敛的条件下，求极限与求积分可以交换次序。最后，我们不加证明地介绍 Weierstrass 多项式逼近定理。

定理 2.20 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$，使 $\{P_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

习 题 1.2

1. 设 a 是数集 A 的上确界，证明 A 中必有数列 $\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

2. 设 $A、B \subset \boldsymbol{R}$，记 $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$，证明 $\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B$。

3. 设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是实数例，证明 $\sup\limits_n\{x_n + y_n\} \leqslant \sup\limits_n\{x_n\} + \sup\limits_n\{y_n\}$；$\inf\limits_n\{x_n\} + \inf\limits_n\{y_n\} \leqslant \inf\limits_n\{x_n + y_n\}$。举例说明等号不一定成立，这与第2题有何不同？

4. 用区间套定理证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，并且 $f(a)\cdot f(b) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内至少有一个零点。

5. 设 $f(x)$ 是直线 $\boldsymbol{R}$ 上的连续函数，α 为一常数，证明 $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ 是开集，而 $\{x \mid f(x) \geqslant \alpha\}$ 是闭集。

6. 设 $G \subset \boldsymbol{R}$，证明 G 为开集的充要条件是 $G = \mathring{G}$。

7. 试证 $\mathring{E}$ 是包含在 E 中的最大开集，而 $\bar{E}$ 是包含 E 的最小闭集。

8. 设 $E \subset \boldsymbol{R}$，证明 E' 是闭集。

9. 设 $f: E \to \boldsymbol{R}, E = (0, +\infty), f(x) = \sqrt{1+x}$，问 f 在 E 上是否一致连续？

10. 设函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上有界，证明 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上一致连续。

11. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上可导函数列，处处收敛于 $f(x)$，且 $f'_n(x)$ 在

$[a,b]$ 上连续($n=1,2,\cdots$)，$\{f'_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$，证明 $f'(x)=g(x)$.

12. 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $E\subset \mathbf{R}$ 上的函数列，$\{f_n(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$. 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)\in \mathbf{N}$，当 $n,m>N(\varepsilon)$ 时，对一切 $x\in E$，都有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

13. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的通项在 E 上满足不等式 $|u_n(x)|\leqslant c_n$($n=1,2,\cdots$)，而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 E 上一致收敛，即部分和序列 $S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)$ 在 E 上一致收敛.

14. 设 $\{u_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上连续函数列，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，证明 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$.

15. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$，$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数 $u'_n(x)$ ($n=1,2,\cdots$)，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\sigma(x)$，证明 $S'(x)=\sigma(x)$，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x).$$

§3　可测集与可测函数

§3.1　直线上集合的勒贝格测度

测度概念是长度、面积及体积概念的推广. 本节介绍直线上点集的一种重要的测度 —— 勒贝格(Lebesgue)测度，并介绍其性质.

我们将有限开区间(a,b)的长度$b-a$称为它的测度,记作$m(a,b)$.

定义 3.1 设$G\subset \boldsymbol{R}$,G是有界开集.定义G的**测度**为它的一切构成区间的长度之和,也就是说,若$G=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k)$,其中$(\alpha_k,\beta_k)$是$G$的构成区间,则$G$的测度定义为

$$mG=\sum_k(\beta_k-\alpha_k).$$

如果G的构成区间是可数多个,上式右边是无穷级数,由于G有界,故存在开区间(a,b)使$G\subset(a,b)$,对于任何n,有

$$\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)\subset(a,b),$$

从而有
$$\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)\leqslant b-a,$$

令$n\to\infty$,得

$$mG=\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\leqslant b-a<+\infty.$$

这表明无穷级数收敛,定义 3.1 是有意义的.

在讨论闭集的测度之前,我们先讨论闭集的结构.对闭集F,若有闭区间$[a,b]$,使$F\subset[a,b]$,且$a,b\in F$,则称$[a,b]$为含有F的**最小闭区间**.

引理 3.1 非空有界闭集F,若不是闭区间,就是含有它的最小闭区间除去一个非空开集.

证 由F有界及确界存在定理知F的上、下确界均存在.令$\alpha=\inf F$,$\beta=\sup F$.由F是闭集易证α、$\beta\in F$.显然$F\subset[\alpha,\beta]$且$[\alpha,\beta]$为含有F的最小闭区间.若$F\neq[\alpha,\beta]$,因F^c是开集,故$[\alpha,\beta]\setminus F=(\alpha,\beta)\setminus F=(\alpha,\beta)\cap F^c$是非空开集,记$G=[\alpha,\beta]\setminus F$,于是$F=[\alpha,\beta]\setminus([\alpha,\beta]\setminus F)=[\alpha,\beta]\setminus G$.

定义 3.2 设F为非空有界闭集,$[\alpha,\beta]$为含有它的最小闭区间,则因$F=[\alpha,\beta]\setminus G$(其中$G=[\alpha,\beta]\setminus F$为一开集),我们

定义$(\beta-\alpha)-mG$为**闭集**F的**测度**,即

$$mF=(\beta-\alpha)-mG.$$

例 3.1 证明有限集 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的测度是 0.

证 不妨 $a_1<a_2<\cdots<a_n$. 含 E 的最小闭区间为$[a_1,a_n]$, $G=[a_1,a_n]-E=\bigcup_{k=1}^{n-1}(a_k,a_{k+1})$, $mG=\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_1$,所以 $mE=(a_n-a_1)-mG=0$.

例 3.2 讨论例 2.8 中 Cantor 集 P_0 的测度.

解 显然含 P_0 的最小闭区间为$[0,1]$,且 $P_0=[0,1]\setminus G$,其中 $G=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\cup\cdots$,

$$mG=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots+\frac{2^n}{3^{n+1}}+\cdots=1,$$

故 $mP_0=(1-0)-mG=1-1=0$.

我们知道,$\boldsymbol{R}$ 中存在着大量的既不开也不闭的集合,例如有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 等等,怎样定义这些集合的测度呢?回忆圆的面积 S 的定义方法:设圆外切正 n 边形面积为A_n,内接正 n 边形面积为B_n,则 $B_n<S<A_n$. 我们不妨称$\lim\limits_{n\to\infty}B_n$(即 $\sup B_n$)为圆的内面积 S_*,称$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$(即 $\inf A_n$)为圆的外面积 S^*. 因 $S^*=S_*$,所以我们说圆是有面积的,其面积值 $S=S^*=S_*$. 与此相仿,我们可用计算"外长度"与"内长度"的办法来定义 $\boldsymbol{R}$ 中点集的测度.

定义 3.3 设 $E\subset\boldsymbol{R}$ 为有界集,定义 E 的**外测度**m^*E 为

$$m^*E=\inf\{mG\mid E\subset G,G\text{ 为开集}\}.$$

定义 E 的**内测度**m_*E 为

$$m_*E=\sup\{mF\mid F\subset E,F\text{ 为闭集}\}.$$

由 E 有界及确界存在定理知,对任意有界集 E,其内、外测度均存在. 设 F、G 分别是满足$F\subset E\subset G$ 的闭集与开集,且设 $F=[\alpha,$

$\beta] - G_0$，$[\alpha,\beta]$是含有F的最小闭区间.由$F = [\alpha,\beta] - G_0 \subset G$知$[\alpha,\beta] \subset G \cup G_0$，从而$\beta - \alpha \leqslant mG + mG_0$，即$mF = (\beta - \alpha) - mG_0 \leqslant mG$.于是

$$m_* E = \sup\{mF \mid F \subset E, F\text{ 为闭集}\} \leqslant mG,$$

即$mG \geqslant m_* E$，从而$\inf\{mG \mid E \subset G, G\text{ 为开集}\} \geqslant m_* E$，即

$$m_* E \leqslant m^* E.$$

定义 3.4 设E为直线$\boldsymbol{R}$上的有界点集，若$m_* E = m^* E$，则称E为**勒贝格可测集**，简称为L**可测集**(或**可测集**).定义$m^* E$或$m_* E$为E的**勒贝格测度**，简称为E的L**测度**，记作mE，即

$$mE = m_* E = m^* E.$$

若$m_* E < m^* E$，则称E是**不可测集**.

例 3.3 设G是$\boldsymbol{R}$中有界开集，讨论G的可测性.

解 设$G = \bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$，其中$(a_k, b_k)$是$G$的构成区间，显然$m^* G = \sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$.在$(a_k, b_k)$内作闭区间$\left[a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k - \frac{\varepsilon}{2^k}\right]$$\left(\varepsilon > 0\text{ 充分小，使 } b_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} > 0\right)$，则闭集$F_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\left[a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k - \frac{\varepsilon}{2^k}\right] \subset G$，且

$$\begin{aligned} mF_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(b_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) - 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

由于对任意闭集$F \subset G$，$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \geqslant mF$，由上式及$\varepsilon$的任意性知$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$是$\{mF \mid F \subset G, F\text{ 为闭集}\}$的上确界，即$m_* G$

$= \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) = m^* G$. 故 G 是勒贝格可测集，且 $m_* G = m^* G = mG$.

当 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ 时，(此处 (a_k, b_k) 是 G 的构成区间)，由于级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$ 收敛，由级数收敛的Cauchy准则知，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}$，使 $\sum_{k=N+1}^{\infty}(b_k - a_k) \leqslant \varepsilon$，与上面类似，令

$$F_N = \bigcup_{k=1}^{N}\left[a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k - \frac{\varepsilon}{2^k}\right],$$

则 F_N 是包含在 G 中的闭集，

$$\begin{aligned} mF_N &= \sum_{k=1}^{N}(b_k - a_k) - 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^N}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) - 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^N}\right) - \sum_{k=N+1}^{\infty}(b_k - a_k) \\ &\geqslant m^* G - 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^N}\right) - \varepsilon. \end{aligned}$$

同样可知 $m_* G = m^* G = mG = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$.

我们还可证明 $\boldsymbol{R}$ 中的任意有界闭集 F 是勒贝格可测集，$m_* F = m^* F = mF$.

由例 3.3 知，对有界开集，其勒贝格测度与前面所定义的测度是一致的，同样，可证对有界闭集两种定义也是一致的，特别对于有限开区间或闭区间，其勒贝格测度就是区间的长度，读者可证明，对任一有限区间也有相同的结论.

例 3.4 设 E 是[0,1]中的有理数组成的集，讨论 E 的可测性.

解 因 E 是可数集，可设 $E = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. 对 $\forall \varepsilon > 0$,

作开区间$\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2^i},a_i+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)$，记$G_\varepsilon=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2^i},a_i+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)$，则$G_\varepsilon$是包含$E$的开集，且$mG_\varepsilon\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{i-1}}=2\varepsilon$.（注意，$\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2^i},a_i+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)$不一定是$G_\varepsilon$的构成区间，它们中有些是相交的，若$\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2^i},a_i+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\cap\left(a_j-\frac{\varepsilon}{2^j},a_j+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)\neq\varnothing$，不妨设$a_i-\frac{\varepsilon}{2^i}<a_j-\frac{\varepsilon}{2^j}<a_i+\frac{\varepsilon}{2^i}<a_j+\frac{\varepsilon}{2^j}$，则$m\left[\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2^i},a_i+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\cup\left(a_j-\frac{\varepsilon}{2^j},a_j+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)\right]=m\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2^i},a_j+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)=a_j+\frac{\varepsilon}{2^j}+\frac{\varepsilon}{2^i}-a_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2^{i-1}}+\frac{\varepsilon}{2^{j-1}}=m\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2^i},a_i+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)+m\left(a_j-\frac{\varepsilon}{2^j},a_j+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)$，由此可推知，若$I_k$是一列开区间，则$m(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}mI_k$).

于是
$$m^*E\leqslant mG_\varepsilon\leqslant 2\varepsilon.$$
因为
$$0\leqslant m_*E\leqslant m^*E\leqslant 2\varepsilon,$$
所以由ε的任意性知$m_*E=m^*E=0$，故E是可测集，且$mE=0$.

仿本例可证：任意有界可数集都是测度为0的可测集．但测度为0的集不一定是可数的，例如Cantor集P_0.

上面介绍了直线上的有界点集的测度概念，现在将它推广到无界点集上去.

定义3.5 设E是$\boldsymbol{R}$中的无界点集，若E与任何开区间的交是可测集，则称E为**可测集**，并且定义E的测度为
$$mE=\lim_{n\to\infty}m((-n,n)\cap E).$$
注意，无界集的测度可以是有限数，也可以是$+\infty$.

一般我们提到可测集，既指 $mE<+\infty$，又指 $mE=+\infty$. 若 $mE<+\infty$，则称 E 为**有限可测集**. 我们定义空集 $\varnothing$ **的测度为 0**，即 $m(\varnothing)=0$.

定理 3.1 可测集的测度具有如下性质：

(1) $m(\varnothing)=0$；

(2) 非负性：设 E 为可测集，则 $m(E)\geqslant 0$；

(3) 可列可加性：设 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 是一列可测集，且 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 是可测集，且

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}mE_i.$$

定理 3.1 中的结论在直观上是容易接受的，我们略去较为复杂的证明.

例3.5 $\boldsymbol{R}$ 是可测集，且 $m\boldsymbol{R}=+\infty$. 因对任意开集 G，$\boldsymbol{R}\cap G=G$ 是可测集，且 $\boldsymbol{R}\cap(-n,n)=(-n,n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}m(\boldsymbol{R}\cap(-n,n))=\lim\limits_{n\to\infty}m(-n,n)=\lim\limits_{n\to\infty}2n=+\infty$. 有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 是可测集，且 $m\boldsymbol{Q}=0$. 可设 $\boldsymbol{Q}=\{r_1,r_2,\cdots\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$，$\{r_k\}$ 是可测集且 $m\{r_k\}=0$，$\{r_k\}\cap\{r_l\}=\varnothing(k\neq l)$. 故 $\boldsymbol{Q}$ 是可测集，且 $m\boldsymbol{Q}=m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{r_k\})=\sum\limits_{k=1}^{\infty}m\{r_k\}=0$.

定理 3.2 可测集及测度具有如下性质：

(1) 有限可加性：设 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是可测集，且 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$ 是可测集，且 $m(\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}m(E_i)$；

(2) 单调性：设 E_1,E_2 是可测集，且 $E_1\subset E_2$，则 $E_2\setminus E_1$ 是可测集，且 $mE_1\leqslant mE_2$；若 $mE_1<+\infty$，则 $m(E_2\setminus E_1)=mE_2-mE_1$；

(3) 设 E_1,E_2 是可测集，则 $E_1^c,E_2^c,E_1\cap E_2,E_1\setminus E_2$ 都是可测集；

(4) 设 $E_k(k=1,2,\cdots)$ 是一列可测集，则 $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，$\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$ 也是可测集；

(5) 半可加性：设 $E_k(k=1,2,\cdots)$ 是一列可测集，则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}mE_k;$$

(6) 设 $E_k(k=1,2,\cdots)$ 是一列可测集，且满足 $E_k\subset E_{k+1}$ $(k=1,2,\cdots)$，则 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}mE_n$；

(7) 设 $E_k(k=1,2,\cdots)$ 是一列可测集，且满足 $E_k\supset E_{k+1}$ $(k=1,2,\cdots)$，$m(E_1)<+\infty$，则 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}mE_n$.

关于定理的证明，在此略去.

例 3.6 由测度的定义，凡外测度为零的集都是可测集，其测度为零，称为**零测集**. 零测集的任一子集的外测度为零，故也是零测集. 由定理 3.1 之(3) 及定理 3.2 之(1),(5) 知有限个或可数个零测集的并仍为零测集.

例 3.7 设 E 是 $\boldsymbol{R}$ 中全体无理数集：$E=\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$. 由定理3.2 之(2)，$E$ 为可测集，且 $m(E)=m\boldsymbol{R}-m\boldsymbol{Q}=+\infty-0=+\infty$，即 E 的测度是 $+\infty$. 同理可知，$[0,1]$ 中全体无理数集的测度为 1.

定义 3.6 对开集及闭集进行至多可数次的交、并运算所得到的集，称为**波雷尔(Borel)集**.

由定理3.1及3.2知，凡波雷尔集都是 L 可测集. 若集合 G 可表示为可数个开集的交集，则称 G 为 $\boldsymbol{G_\delta}$ **型集**；若集合 F 可表示为可数个闭集的并集，则称 F 为 $\boldsymbol{F_\sigma}$ **型集**. G_δ 型集及 F_σ 型集显然是波雷尔集，从而是 L 可测集. 由此可见，L 可测集类是相当广泛的集类，我们通常碰到的集合大多数是 L 可测集. 但是，人们确实发现

了不是 L 可测集的例子，也发现了有些集是 L 可测集但不是波雷尔集，由于它们的构造较复杂，在此从略.

§3.2　可测函数及其性质

本段介绍一类重要的函数——可测函数. 除特殊声明外，本段中所论的可测集均指 $\boldsymbol{R}$ 中勒贝格可测集(有界或无界)，所论函数 f 均指实函数(其值可以为 $\pm\infty$)，若 f 均取有限值，则称 f 为有限值函数.

定义 3.7　设 E 是可测集，f 是定义在 E 上的实函数，如果对任何有限实数 a，集合

$$E(f>a)=\{x \mid f(x)>a, x\in E\}$$

都是可测集，则称 f 是 E 上的**勒贝格可测函数**，简称为**可测函数**，或者称 **f 在 E 上可测**.

定理 3.3　设 f 是定义在可测集 E 上的实函数，以下条件之一都是 f 在 E 上可测的充要条件：

(1) 对任何有限实数 a，$E(f\geqslant a)=\{x \mid f(x)\geqslant a, x\in E\}$ 都是可测集；

(2) 对任何有限实数 a，$E(f<a)=\{x \mid f(x)<a, x\in E\}$ 都是可测集；

(3) 对任何有限实数 a，$E(f\leqslant a)=\{x \mid f(x)\leqslant a, x\in E\}$ 都是可测集；

(4) 对任何有限实数 $a,b(a<b)$，$E(a\leqslant f<b)=\{x \mid a\leqslant f(x)<b, x\in E\}$ 都是可测集(此处充分性要假定 $|f(x)|<+\infty$).

证　(1) 由于 $E(f\geqslant a)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left(f>a-\dfrac{1}{n}\right)$，故当 f 可测时，$E\left(f>a-\dfrac{1}{n}\right)$ 是可测集，其可数交 $E(f\geqslant a)$ 是可测集. 反

之，由于 $E(f>a)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant a+\dfrac{1}{n}\right)$，当条件(1) 成立时，$E\left(f\geqslant a+\dfrac{1}{n}\right)$是可测集，其可数并 $E(f>a)$ 是可测集，由定义知 f 在E 上可测.

(2) 由$E(f<a)=E\setminus E(f\geqslant a)$，$E(f\geqslant a)=E\setminus E(f<a)$. 故 $E(f\geqslant a)$ 是可测集的充要条件是 $E(f<a)$ 是可测集，由(1) 知结论成立.

(3) 由$E(f\leqslant a)=E\setminus E(f>a)$，$E(f>a)=E\setminus E(f\leqslant a)$ 即知结论成立.

(4) 当 f 在E 上可测时，$E(a\leqslant f<b)=E(f\geqslant a)\setminus E(f\geqslant b)$ 是两个可测集的差，故是可测集. 反之，当(4) 的条件成立时，且设 $|f(x)|<+\infty$，则 $E(f\geqslant a)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(a\leqslant f<a+n)$，故 $E(f\geqslant a)$ 是可测集，由(1) 知 f 在E 上可测.

推论 3.1 设$f(x)$在 E 上可测，则 $E(f=a)$ 总是可测集，不论 a 是有限实数或 $\pm\infty$.

证 由于$E(f=a)=E(f\geqslant a)\setminus E(f>a)$，

$$E(f=+\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f>n),$$

$$E(f=-\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f<-n),$$

据定理 3.3 及可测集的性质即知结论成立.

例 3.8 证明区间[0,1] 上的狄利克雷(Dirichlet) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为}[0,1]\text{ 中的有理数},\\ 0, & x\text{ 为}[0,1]\text{ 中的无理数}\end{cases}$$

是可测函数.

证 对任何实数 α，由于 $\alpha>1$ 时，$E(D\geqslant\alpha)=\varnothing$；$0<\alpha\leqslant 1$ 时，$E(D\geqslant\alpha)=\boldsymbol{Q}\cap[0,1]$；$\alpha\leqslant 0$ 时 $E(D\geqslant\alpha)=[0,1]$ 均是可测集，因此 $D(x)$ 是$[0,1]$ 上的可测函数.

例 3.9 设 $E \subset \boldsymbol{R}$,称

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

为集 E 的**特征函数**. 与例 3.8 类似,可以证明当 E 是可测集时,$\chi_E(x)$ 是 E 上的可测函数.

例 3.10 定义在零测集 E 上的任何函数 f 都是可测的,这是因为 E 的任何子集都是可测集. 定义在可测集 E 上的常值函数 f 是可测函数,事实上,若设 $f(x) = c$,则对任何实数 a,

$$E(f > a) = \begin{cases} \varnothing, & 当\ c \leqslant a, \\ E, & 当\ c > a \end{cases}$$

是可测集.

定理 3.4 设 f 是可测集 E 上的连续函数,则 f 必是 E 上的可测函数.

证 设 $x \in E(f > a)$,即 $x \in E$,$f(x) > a$. 设 $\varepsilon > 0$ 使 $f(x) - \varepsilon > a$. 由于 f 在 x 处连续,必存在 $\delta > 0$,使 $y \in E$,且 $|y - x| < \delta$ 时,有 $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$,即有 $f(y) > f(x) - \varepsilon > a$,令 $U(x) = \{y \mid |y - x| < \delta, y \in \boldsymbol{R}\}$,则当 $y \in E \cap U(x)$ 时,$f(y) > f(x) - \varepsilon > a$,从而 $y \in E(f > a)$. 于是 $E \cap U(x) \subset E(f > a)$. 对 $E(f > a)$ 中的每个 x 作上述 $U(x)$,则 $\bigcup_{x \in E(f>a)} [E \cap U(x)] = E \cap [\bigcup_{x \in E(f>a)} U(x)] \subset E(f > a)$. 若令 $G = \bigcup_{x \in E(f>a)} U(x)$,则 G 是开集,且 $E \cap G \subset E(f > a)$. 另一方面,$E(f > a) \subset \bigcup_{x \in E(f>a)} U(x) = G$,$E(f > a) \subset E$,$E(f > a) \subset E \cap G$,从而 $E(f > a) = E \cap G$,由于 E,G 都是可测集,故 $E(f > a)$ 是可测集,从而 f 是 E 上的可测函数.

定理 3.4 表明,可测函数是比连续函数更广泛的一类函数. 由例 3.8 我们知道,可测函数不一定是连续函数.

定理 3.5 设 $f(x)$,$g(x)$ 都是可测集 E 上的可测函数,则

$kf(x)$(k 是常数)，$f(x)+g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$f(x)/g(x)$($g(x)\neq 0$)，$|f(x)|$ 以及 $|f(x)|^P$(P 为常数，$P\neq -1$) 都是 E 上的可测函数.

证 我们只证 $f(x)+g(x)$ 是 E 上的可测函数，其余的留给读者自证.

设 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ 是全体有理数，则对任何实数 α，有

$$E(f+g>\alpha)=\bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f>r_i)\cap E(g>\alpha-r_i)].$$

事实上，设 $x\in E(f+g>\alpha)$，则 $f(x)+g(x)>\alpha$，即 $f(x)>\alpha-g(x)$，据有理数的稠密性，存在有理数 r_i，使 $f(x)>r_i>\alpha-g(x)$，因此 $x\in E(f>r_i)\cap E(g>\alpha-r_i)$，从而 $E(f+g>\alpha)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f>r_i)\cap E(g>\alpha-r_i)]$，另一方面，易证相反的包含关系也成立.

由于 $f(x)$，$g(x)$ 在 E 上可测，故 $E(f>r_i)$ 与 $E(g>\alpha-r_i)$ 是可测集，它们的交的可数并 $E(f+g>\alpha)$ 是可测集，从而 $f(x)+g(x)$ 是 E 上的可测函数.

例 3.11 设 $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，其中 E_i 是互不相交的可测集($i=1,2,\cdots,n$)，$\varphi(x)$ 是定义在 E 上的函数，在每个 E_i 上 $\varphi(x)$ 取常数值 c_i($i=1,2,\cdots,n$)，称 $\varphi(x)$ 是 E 上的**简单函数**. 利用集 E_i 的特征函数

$$\chi_{E_i}(x)=\begin{cases}1, & x\in E_i,\\ 0, & x\in E\setminus E_i\end{cases}$$

可以将 $\varphi(x)$ 表示为 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x)$. 由于每个特征函数都是 E 上的可测函数，由定理 3.5 知 $\varphi(x)$ 是 E 上的可测函数，即简单函数是可测函数.

例 3.12 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的实函数，令

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x)\geqslant 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } f(x)<0 \text{ 时}. \end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases} -f(x), & \text{当 } f(x)\leqslant 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } f(x)>0 \text{ 时}. \end{cases}$$

分别称 f^+ 与 f^- 为 f 的**正部**和**负部**. 显然,$f=f^+-f^-$,$|f|=f^++f^-$;$f^+=\frac{1}{2}(f+|f|)$,$f^-=\frac{1}{2}(|f|-f)$. 由定理3.5知 f 在 E 上可测的充要条件是它的正、负部在 E 上可测.

定义 3.8 设 X 是一集合,E 是一零测集,如果某性质 P 在 $X\setminus E$ 上成立,则称 P 在 X 上**几乎处处成立**.

例如,若 $E(f\neq g)=\{x\mid f(x)\neq g(x),x\in E\}$ 是零测集,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点集 E 上**几乎处处相等**,记作 $f=g(\text{a.e.})$. 又如,若 $E(f=\pm\infty)=\{x\mid f(x)=\pm\infty,x\in E\}$ 是零测集,则称 $f(x)$ 在 E 上**几乎处处有限**.

例3.13 设 f 在 E 上可测,g 是在 E 上有定义的一个函数,且 $f=g(\text{a.e.})$,则 g 在 E 上可测.

证 记 $E_0=E(f\neq g)$,则 E_0 是零测集,故 g 在 E_0 上可测. 由于 $E\setminus E_0$ 是可测集,$E\setminus E_0\subset E$,f 在 E 上可测,由习题1.3第5题知 $g=f$ 在 $E\setminus E_0$ 上可测,再由习题1.3第6题知 g 在 $E=E_0\cup(E\setminus E_0)$ 上可测.

由例3.13知,改变函数在某个零测集上的函数值,其可测性不受影响,如有需要,我们有时将改变函数在某个零测集上的值.

§3.3 可测函数与连续函数的关系　依测度收敛

由定理3.4我们知道,可测集 E 上的连续函数一定是可测函数. 反之,一般的可测函数可以说是“基本上连续”的函数.

定理3.6(鲁津 ЛуЗИН) 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处

有限的可测函数,则对任意$\delta>0$,存在闭子集$E_\delta\subset E$,使$f(x)$在E_δ上是连续函数,且$m(E\setminus E_\delta)<\delta$.存在$E$上的连续函数$g(x)$,使$mE(f\neq g)<\delta$.当$|f(x)|\leqslant M$时,可取上面的$g(x)$满足$|g(x)|\leqslant M$.

证明略.

鲁津定理使我们对可测函数的结构有了进一步的了解,它揭示了可测函数与连续函数的关系.在应用上通过它常常可以把有关的可测函数问题归结为连续函数的问题,从而得以简化.

我们知道,连续函数列的极限函数不一定是连续函数,换句话说,连续函数类对极限运算不封闭,这给分析带来了许多的不方便.然而,可测函数却克服了上述缺陷.设$\{f_n(x)\}$是定义在E上的函数列,$f(x)$是E上的函数,若$\{f_n(x)\}$不收敛于$f(x)$的点的全体是零测集,则称$\{f_n(x)\}$在E上**几乎处处收敛**于$f(x)$,记作$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(\text{a.e.})$或$f_n(x)\to f(x)(\text{a.e.})$.当$\{f_n(x)\}$在$E$上处处收敛于$f(x)$时,$\{f_n(x)\}$不收敛于$f(x)$的点的全体是$\varnothing$,其测度为零,故$f_n(x)\to f(x)(\text{a.e.})$,下面我们不加证明地叙述一个可测函数列的极限定理.

定理 3.7 设$\{f_n(x)\}$是可测集E上的可测函数列,并且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(\text{a.e.})$,则极限函数$f(x)$也是$E$上的可测函数.

据定理3.7,简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$的极限函数(只要是几乎处处存在)是可测函数;反之还可证明:可测集上的任一可测函数都可以表示为一个简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$的极限.

现在,我们引进一种用测度来描述函数列收敛的概念.

定义 3.9 设$\{f_n(x)\}$是可测集E上一列几乎处处有限的可测函数,若存在E上几乎处处有限的可测函数$f(x)$满足:对$\forall\varepsilon>0$,有$\lim\limits_{n\to\infty}mE(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=0$,则称$\{f_n(x)\}$在$E$上**依测度**

收敛于 $f(x)$，记作 $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$. 换句话说，对 $\forall \varepsilon > 0$ 及 $\forall \delta > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，不等式

$$mE(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) < \delta$$

成立.

依测度收敛的意义是：如果事先给了一个表示偏差的正数 ε，不论 ε 多么小，使得 E 中满足 $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ 的点 x 虽然可能很多，但这些点 x 的全体的测度随 n 无限增大而趋于零.

依测度收敛和我们熟知的处处收敛或几乎处处收敛概念是有很大区别的. 我们可举出依测度收敛而处处不收敛的函数列的例子. 下面是一个处处收敛但不是依测度收敛的例子.

例 3.14 设 $E = (0, +\infty)$，作函数列：

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, n]; \\ 0, & x \in (n, +\infty), \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

显然 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上处处收敛于 $f(x) = 1$. 但当 $0 < \varepsilon < 1$ 时，$E(|f_n - 1| \geqslant \varepsilon) = (n, +\infty)$. $m(n, +\infty) = +\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} m(n, +\infty) \neq 0$，因此 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上不是依测度收敛于 $f(x) = 1$.

虽然两种收敛互不包含，但它们之间有着密切的联系. 例如，对可测集 E 加上 $mE < +\infty$ 这一限制条件，就有下面的定理.

定理 3.8（勒贝格 Lebesgue） 设 $m(E) < +\infty$，f 和 $f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (a. e.)，则在 E 上 $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$.

证 记 $A_0 = E(|f| = +\infty)$,

$$A_n = E(|f_n| = +\infty) \ (n = 1, 2, \cdots),$$

$$B = E(f_n \text{ 不收敛于 } f),$$

$$Q = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \cup B,$$

由题设条件知 $mQ = 0$.

对 $\forall \varepsilon > 0$，记 $E_k(\varepsilon) = E(|f_k - f| \geqslant \varepsilon)$；$R_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)$；$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon)$. 因 $\{R_n(\varepsilon)\}$ 单调减小，且 $R_1(\varepsilon) \subset E$，故 $mR_1(\varepsilon) < +\infty$，由定理 3.2 之(7) 有 $\lim_{n\to\infty} m(R_n(\varepsilon)) = m(M)$. 现在证明 $M \subset Q$. 事实上，若 $x \notin Q$，则 $f_1(x), f_2(x), \cdots$，及 $f(x)$ 都是有限数，且 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，故存在 n，使 $k \geqslant n$ 时，$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$，即 $x \notin E_k(\varepsilon)$，因此 $x \notin R_n(\varepsilon)$，从而 $x \notin M$，于是 $M \subset Q$. 由 $mQ = 0$ 得 $m(M) = 0$，即 $\lim_{n\to\infty} m(R_n(\varepsilon)) = 0$. 因 $E_n(\varepsilon) \subset R_n(\varepsilon)$，$m(E_n(\varepsilon)) \leqslant m(R_n(\varepsilon))$，故 $\lim_{n\to\infty} m(E_n(\varepsilon)) = 0$，这表明在 E 上 $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$.

需注意的是此定理之逆并不成立，然而我们有下面的黎斯定理.

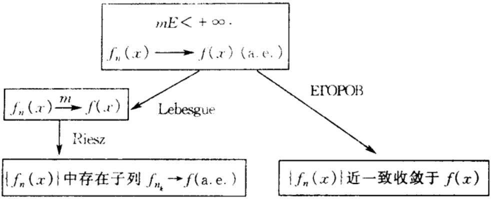
定理 3.9(黎斯 Riesz) 设在 E 上 $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$，则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

最后，我们指出几乎处处收敛与一致收敛的关系：一致收敛当然是几乎处处收敛的，但反之则不然，例如例 2.11 中的序列 $f_n(x) = x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛，但是只要从 $[0,1]$ 的右端去掉任意小的一段成为 $[0,1-\delta]$，则 $f_n(x)$ 在其上就一致收敛了.

定理 3.10(叶果洛夫 ЕГОРОВ) 设 $mE < +\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列几乎处处有限的可测函数列. 如果 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于实值可测函数 $f(x)$，则对任意 $\delta > 0$，存在可测集 $E_\delta \subset E$，使 $\{f_n(x)\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$，且 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$.

叶果洛夫定理告诉我们，满足定理条件的函数列，即使不一致收敛，也“基本上”(去掉一个测度可任意小的集合后)一致收敛，我们称为**近一致收敛**. 基于此，在许多场合它提供了处理极限交换问题的有力工具. 要注意的是，当 $mE = +\infty$ 时，无定理中相应的结论.

我们把几种收敛性的关系用下图表示：



前面我们讨论了实值可测函数，在结束本节之前，我们把这个概念推广到复值函数上去，定义如下：设 E 是可测集，函数 $f:E\to\mathbf{C}$ 称为可测函数，当且仅当它的实部 Ref 及虚部 Imf 都是可测函数.

习 题 1.3

1. 设 A、B 是 $\mathbf{R}$ 中有界点集，证明：若 $m^*A=0$，则 $m^*(A\cup B)=m^*B$.

2. 设 E_1、E_2 是 $\mathbf{R}$ 中的 L 可测集，$E_1\subset E_2$，证明 $mE_1\leqslant mE_2$.

3. 证明可数个零测集的并与交均为零测集.

4. 设 E_1 与 E_2 都是 L 可测集，证明

$$mE_1+mE_2=m(E_1\cap E_2)+m(E_1\cup E_2)$$

5. 设 E_1、E_2 是 L 可测集，且 $E_1\subset E_2$，f 是 E_2 上实可测函数，证明 f 限制在 E_1 上时是 E_1 上的可测函数.

6. 设 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，$f$ 是 E 上的实函数，若 f 在 $E_k(k=1,2,\cdots)$ 上可测，证明 f 在 E 上可测.

7. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是可测集 E 上的可测函数，证明 $E(f>g)$ 是可测集.

8. 设 $f(x)$ 是定义在某区间上的单调函数，证明 $f(x)$ 是可测函数.

9. 设 $mE<+\infty$，在 E 上 $f_n(x)\xrightarrow{m}f(x)$，并且在 E 上 $f_n(x)\leqslant g(x)(n=1,2,\cdots)$ 几乎处处成立，试证在 E 上 $f(x)\leqslant g(x)$ 几乎处处成立.

§4　勒贝格积分

§4.1　勒贝格积分的定义

我们在高等数学中学过的积分称为黎曼(Riemann)积分,这种积分能解决很多的理论与实际问题.但随着科学技术的日益发展,越来越显得有很多不足之处.勒贝格(Lebesgue)曾证明,定义在$[a,b]$上的有界函数$f(x)$黎曼可积的充要条件是$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处连续.因此,黎曼积分是适用于连续或几乎处处连续的函数的积分.这样,如下的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为}[0,1]\text{中的有理数},\\ 0, & x\text{ 为}[0,1]\text{中的无理数}\end{cases}$$

在$[0,1]$上就不是黎曼可积的.我们来简略分析一下$D(x)$不可积的原因.按黎曼定积分的定义,首先是对自变量的积分区间作任意分割,将$[a,b]$分成一些小区间$[x_{i-1},x_i]$,然后任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$;再作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$;最后取极限.我们可想象到,要想使上述和式的极限存在,而且与分割方式和ξ_i的取法无关,就要求函数在小区间$[x_{i-1},x_i]$上的函数值变化不大,或者函数在某点附近变化较大,但这样的点所成集合应是零测集.很明显,狄利克雷函数$D(x)$不满足这样的条件.如果将黎曼积分定义中的对定义域进行分割,改为首先对函数的值域进行分割,情况就不同了.我们有下面的定义.

定义 4.1　设E是L可测集,$mE<+\infty$,f是E上的有界可测函数,即存在实数c,d,使$f(E)\subset(c,d)$.在$[c,d]$中任取一分点组

$$D:\quad c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d.$$

记 $\lambda(D)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(y_k-y_{k-1}), E_k=E(y_{k-1}\leqslant f<y_k)\ (k=1,2,\cdots,n)$. 由 f 是可测函数知 E_k 是可测集, $E_1,\cdots,E_n$ 互不相交, 且 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$. 任取 $\xi_k: y_{k-1}\leqslant \xi_k\leqslant y_k\ (k=1,2,\cdots,n)$. 作和式

$$S(D)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k mE_k,$$

称它为 f 在分点组 D 下的一个**和数**, 如果存在数 S, 它满足如下条件: 对任何 $\epsilon>0$, 总有 $\delta>0$, 使得对任何分点组 D, 当 $\lambda(D)<\delta$ 时, 就有 $|S(D)-S|<\epsilon$ 恒成立, 即 $S=\lim\limits_{\lambda(D)\to 0}S(D)$, 这时就称 f 在 E 上是 **L 可积的**, 并称 S 是 f 在 E 上的**勒贝格积分**, 简称为 **L 积分**, 记作

$$S=(L)\int_E f\mathrm{d}x,$$

或

$$S=\int_E f\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

有时也简记为 $\int_E f\mathrm{d}x$, 当 $E=[a,b]$ 时, 又写成 $\int_a^b f\mathrm{d}x$. 为区别起见, 记黎曼定积分为 $(R)\int_a^b f\mathrm{d}x$.

对于分点组 $D: c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$, 称

$$\overline{S}(D)=\sum_{k=1}^{n}y_k mE(y_{k-1}\leqslant f<y_k),$$

$$\underline{S}(D)=\sum_{k=1}^{n}y_{k-1}mE(y_{k-1}\leqslant f<y_k)$$

分别为函数 f 在分点组 D 下的“大和数”与“小和数”. 可以证明: 当 $\lambda(D)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(y_k-y_{k-1})\to 0$ 时, “大和数” $\overline{S}(D)$ 与“小和数” $\underline{S}(D)$ 的极限都存在, 且二者相等, 记为 $\lim\limits_{\lambda(D)\to 0}\overline{S}(D)=\lim\limits_{\lambda(D)\to 0}\underline{S}(D)=S$. 由于 $y_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant y_k$, 得到 $\underline{S}(D)=\sum\limits_{k=1}^{n}y_{k-1}mE_k$

$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k mE_k = S(D) \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k mE_k = \overline{S}(D)$. 若令 $\lambda(D) \to 0$,便知 $\lim\limits_{\lambda(D)\to 0} S(D) = S$. 因此得如下定理.

定理 4.1 设 $mE < +\infty$,那么在 E 上定义的一切有界可测函数 f 都是 L 可积的.

[0,1]区间上的狄利克雷函数 $D(x)$ 是有界可测函数,由定理 4.1 知 $D(x)$ 在[0,1]上是 L 可积的.

下面我们对比一下黎曼积分与勒贝格积分的定义,这对我们理解新的积分定义是有帮助的.

黎曼定积分	勒贝格积分
$f(x)$ 是定义在有限区间 $[a,b]$ 上的有界函数	$f(x)$ 是定义在 L 可测集 E 上的有界可测函数,且 $mE < +\infty$
在 $[a,b]$ 中任取分点组 T: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 记 $\lambda(T) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k - x_{k-1})$ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$	设 $f(E) \subset (c,d)$,在 $[c,d]$ 中任取分点组 D: $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. 记 $\lambda(D) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(y_k - y_{k-1})$ $E_k = E(y_{k-1} \leqslant f < y_k), E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$
任取 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$,作乘积 $f(\xi_k)\Delta x_k$	任取 $\xi_k \in [y_{k-1}, y_k]$,作乘积 $\xi_k mE_k$
作和式 $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$	作和式 $S(D) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k mE_k$
取极根 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. (假定极限存在,且与分法 T 及 ξ_k 取法无关)	取极限 $\lim\limits_{\lambda(D)\to 0} S(D) = \int_E f\mathrm{d}m$ (极限一定存在,且与分法 D 及 ξ_k 取法无关)

通过比较可以看出，两种定义的共同之处是：在形式上都采用了“分割、作乘积、求和、取极限”这几个步骤，然而勒贝格积分却把定义在区间$[a,b]$上的积分推广到了可测集E上. 在分割时，勒贝格积分是先将函数的值域$[c,d]$($c = \inf\limits_{x\in E} f(x)$, $d = \sup\limits_{x\in E}(f(x))$)分割成子区间$[y_{k-1},y_k]$，然后利用这个分割将定义域$E$分成$n$个互不相交的可测集$E_k$，$E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$，这样做比黎曼定积分直接分割定义域$[a,b]$的优越之处在于：在$E_k$上，$f(x)$的变化不大，$y_{k-1} \leqslant f(x) < y_k$，或者说，当$\xi_k$在$[y_{k-1},y_k]$上变动时，乘积$\xi_k mE_k$变化不大(只要$\lambda(D)$充分小)；而黎曼定积分中的乘积$f(\xi_k)\Delta x_k$，当$\xi_k$在$[x_{k-1},x_k]$中变动时，无论$\lambda(T)$有多小，$f(\xi_k)\Delta x_k$都有可能变化很大(例如狄利克雷函数$D(x)$)，这一点是新、旧积分的不同之处.

由L积分的定义，不难推得以下一些熟知的积分性质，我们略去用定义进行的繁杂推导.

定理 4.2 设$mE < +\infty$，f,g是E上有界可测函数，a,b为常数，则

(1) 若在E上$f \equiv a$，则$\int_E f\mathrm{d}m = a \cdot mE$;

(2) (线性)$\int_E (af + bg)\mathrm{d}m = a\int_E f\mathrm{d}m + b\int_E g\mathrm{d}m$;

(3) (单调性) 若在E上$f(x) \leqslant g(x)$，则$\int_E f\mathrm{d}m \leqslant \int_E g\mathrm{d}m$;

(4) (对积分域的有限可加性) 如果E可分解为有限个互不相交的可测集$E_1,\cdots,E_n$: $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$，则

$$\int_E f\mathrm{d}m = \int_{E_1} f\mathrm{d}m + \int_{E_2} f\mathrm{d}m + \cdots + \int_{E_n} f\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f\mathrm{d}m.$$

推论 4.1 $\left|\int_E f\mathrm{d}m\right| \leqslant \int_E |f| \mathrm{d}m$;

若在 E 上 $f \geqslant 0(\leqslant 0)$，则 $\int_E f\mathrm{d}m \geqslant 0(\leqslant 0)$；

若在 E 上 $a \leqslant f \leqslant b$，则 $a\cdot mE \leqslant \int_E f\mathrm{d}m \leqslant b\cdot mE$.

例 4.1 若 $mE = 0$，则 E 上的任何有界函数的 L 积分为零.

证 因 $mE = 0$，故有界函数 f 在 E 上可测(例 3.10)，由定理 4.1 知 f 在 E 上 L 可积. 设 $a \leqslant f(x) \leqslant b$ $(\forall x \in E)$，由推论 4.1，$amE \leqslant \int_E f\mathrm{d}m \leqslant bmE$，由 $mE = 0$ 便得 $\int_E f\mathrm{d}m = 0$.

例 4.2 设 $mE < +\infty$，f, g 是 E 上的有界可测函数，且 $f = g$(a.e.)，则 $\int_E f\mathrm{d}m = \int_E g\mathrm{d}m$.

证 记 $E_1 = E(f \neq g)$，$E_2 = E(f = g)$. 由条件有 $mE_1 = 0$，由例 4.1 知 $\int_{E_1} f\mathrm{d}m = \int_{E_1} g\mathrm{d}m = 0$，在 E_2 上 $f(x) \equiv g(x)$，故 $\int_{E_2} f\mathrm{d}m = \int_{E_2} g\mathrm{d}m$，两式相加即得结论.

例 4.3 设 $mE < +\infty$，f 在 E 上有界可测，且在 E 上 $f \geqslant 0$，如果 $\int_E f\mathrm{d}m = 0$，则 f 在 E 上几乎处处为零.

证 对 $\forall \varepsilon > 0$，由有限可加性得

$$0 = \int_E f\mathrm{d}m = \int_{E(f<\varepsilon)} f\mathrm{d}m + \int_{E(f\geqslant\varepsilon)} f\mathrm{d}m.$$

由 $f(x) \geqslant 0$ 知 $\int_{E(f<\varepsilon)} f\mathrm{d}m \geqslant 0$，从而 $0 \geqslant \int_{E(f\geqslant\varepsilon)} f\mathrm{d}m$；但在 $E(f \geqslant \varepsilon)$ 上 $f(x) \geqslant \varepsilon$，故 $0 \geqslant \int_{E(f\geqslant\varepsilon)} f\mathrm{d}m \geqslant \varepsilon \cdot m(E(f \geqslant \varepsilon)) \geqslant 0$，由此得到 $m(E(f \geqslant \varepsilon)) = 0$. 若取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，则 $m\left(E\left(f \geqslant \frac{1}{n}\right)\right) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$，因此 $E(f > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geqslant \frac{1}{n}\right)$ 是可数个零测

集的并集,其测度为零,从而 $f=0$(a.e.).

我们可将勒贝格积分的概念推广到具有无穷测度值的集合上或无界可测函数的情形,也就是建立广义勒贝格积分的概念.下面分两步进行.

(1) 无界函数 $f(x)$ 在具有有限测度值的可测集 E 上的 L 积分,即 $mE<+\infty$,$f(x)$ 在 E 上无界可测.

首先,假设 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数,即 $f(x)\geqslant 0$.令

$$[f(x)]_n=\begin{cases} f(x), & f(x)\leqslant n, \\ n, & f(x)>n. \end{cases}$$

容易证明 $\{[f(x)]_n\}$ 是 E 上的有界可测函数列,因此,对每个 n,$\int_E [f(x)]_n \mathrm{d}m$ 都存在.又因为

$$[f(x)]_1\leqslant [f(x)]_2\leqslant \cdots \leqslant [f(x)_n]\leqslant \cdots,$$

所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E [f(x)]_n \mathrm{d}m$ 存在(有限或无限).如果极限值是有限的,则称 $f(x)$ 在 E 上**勒贝格可积**,并且积分值为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_E [f(x)]_n \mathrm{d}m.$$

如果极限是无限的,则称 $f(x)$ 在 E 上**有积分**.

其次,取消 $f(x)$ 在 E 上非负的限制.此时 $f=f^+-f^-$,其中 f^+ 与 f^- 分别是 f 的正部与负部(见例3.12).当 f 在 E 上可测时,f^+ 与 f^- 都是 E 上非负可测函数.若积分 $\int_E f^+ \mathrm{d}m$ 与 $\int_E f^- \mathrm{d}m$ 不同时为 $+\infty$,则定义 $f(x)$ 在 E 上的**勒贝格积分**为

$$\int_E f\mathrm{d}m=\int_E f^+ \mathrm{d}m-\int_E f^- \mathrm{d}m.$$

若上式右端的两个积分都是有限的,则称 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积.

(2) $f(x)$ 在具有无穷测度值的可测集 E 上的 L 积分,即 mE

$=+\infty$，f 在 E 上可测.

$$令\ F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E,\\ 0, & x\in E^c,\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在整个 $\boldsymbol{R}$ 上有定义且可测，并有 $F(x)=F^+(x)-F^-(x)$. 若对任何 $n\in\boldsymbol{N}$，$F^+(x)$ 与 $F^-(x)$ 都在 $I_n=[-n,n]$ 上 L 可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{I_n}F^+(x)\mathrm{d}m\ 与\ \lim_{n\to\infty}\int_{I_n}F^-(x)\mathrm{d}m$$

都存在(有限)，则称 $f(x)$ 在 E 上**可积**，且规定

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{I_n}F^+(x)\mathrm{d}m-\lim_{n\to\infty}\int_{I_n}F^-(x)\mathrm{d}m.$$

至此，实值可测函数的勒贝格积分的推广工作已告完成. 把积分的概念推广到复值函数是很容易的. 设 E 为可测集，$f:E\to\boldsymbol{C}$，设 $f=u+iv$，其中 u、v 是定义在E上的实值可测函数，定义 f 在 E 上的L 积分为

$$\int_E f\mathrm{d}m=\int_E u\mathrm{d}m+i\int_E v\mathrm{d}m.$$

当 u 和 v 同时是L 可积的，则称 f 是L **可积**的.

§4.2　勒贝格积分的性质

勒贝格积分除了具有类似黎曼积分性质的定理 4.2 及推论外，还具有如下几个重要性质.

定理4.3(绝对可积性)　设$f(x)$是可测集 E 上的可测函数，则 $f(x)$ 在 E 上 L 可积的充要条件是 $|f(x)|$ 在 E 上 L 可积，且有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}m\right|\leqslant\int_E|f(x)|\mathrm{d}m.$$

证　仅就 $mE<+\infty$ 的情况证明.

必要性 若 $f(x)L$ 可积，则

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}m < +\infty, \int_E f^-(x)\mathrm{d}m < +\infty,$$

而
$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x),$$

故
$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}m = \int_E f^+(x)\mathrm{d}m + \int_E f^-(x)\mathrm{d}m < +\infty,$$

故 $|f(x)|$ L 可积.

充分性 设 $|f(x)|$ L 可积，则由 $0 \leqslant f^+(x) \leqslant |f(x)|$，$0 \leqslant f^-(x) \leqslant |f(x)|$ 易知

$$[f^+(x)]_n \leqslant [|f(x)|]_n;$$

$$[f^-(x)]_n \leqslant [|f(x)|]_n (n = 1,2,\cdots),$$

由积分单调性，两边积分再取极限得：

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}m < +\infty;$$

$$\int_E f^-(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}m < +\infty.$$

因而

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \int_E f^+(x)\mathrm{d}m - \int_E f^-(x)\mathrm{d}m$$

存在且为有限数，故 $f(x)$ 在 E 上 L 可积. 此时我们还有

$$\left|\int_E f\mathrm{d}m\right| = \left|\int_E f^+\mathrm{d}m - \int_E f^-\mathrm{d}m\right|$$
$$\leqslant \int_E f^+\mathrm{d}m + \int_E f^-\mathrm{d}m = \int_E |f|\mathrm{d}m.$$

定理 4.4（绝对连续性） 设 $f(x)$ 在可测集 E 上 L 可积，则对任意 $\varepsilon > 0$，必存在 $\delta > 0$，使对 E 的任何可测子集 e，只要 $me < \delta$ 时，就有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}m\right| < \varepsilon.$$

证 由 $f(x)L$ 可积及定理 4.3 知 $|f(x)|$ L 可积，而

$$\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E [|f(x)|]_n \mathrm{d}m,$$

故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$,使得

$$\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}m - \int_E [|f(x)|]_N \mathrm{d}m$$

$$= \int_E (|f(x)| - [|f(x)|]_N)\mathrm{d}m < \varepsilon/2.$$

令 $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$,则当 $e \subset E$ 且 $me < \delta$ 时,

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}m\right| \leqslant \int_e |f(x)|\,\mathrm{d}m$$

$$= \int_e (|f(x)| - [|f(x)|]_N)\mathrm{d}m + \int_e [|f(x)|]_N \mathrm{d}m$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \int_e N\mathrm{d}m = \frac{\varepsilon}{2} + Nme$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + N\cdot\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.$$

绝对连续性是说,当积分域的测度很小时,积分值也很小.

定理 4.5(可列可加性) 设 $f(x)$ 在可测集 E 上 L 可积,$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$,$E_k$ 为互不相交的可测集,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m.$$

证 仅就 $mE < +\infty$ 证明. 令 $A_n = E - \bigcup_{k=1}^{n} E_k$,由定理 3.2 知

$$mA_n = mE - m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = mE - \sum_{k=1}^{n} mE_k,$$

再由定理 3.1,$mE = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k$,故

$$\lim_{n\to\infty} mA_n = \lim_{n\to\infty}\left(mE - \sum_{k=1}^{n} mE_k\right) = 0.$$

据积分的有限可加性，有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m - \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m = \int_{A_n} f(x)\mathrm{d}m.$$

由积分的绝对连续性，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_E f(x)\mathrm{d}m - \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m\right) = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)\mathrm{d}m = 0,$$

即
$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m.$$

定理 4.6 设 E 是 L 可测集，$f(x)$ 在 E 上 L 可积，则对任何 $\varepsilon > 0$，必存在 E 上的连续函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}m < \varepsilon.$$

我们略去定理 4.6 的证明. 定理 4.6 表明，勒贝格可积函数可用连续函数去逼近.

§4.3 函数序列积分的收敛定理

本段讨论积分与极限的交换次序问题，我们将看到这个问题在 L 积分范围内得到比在 R 积分范围内远为完满的解决，这正是 L 积分的优越性. 本段中的法都引理、勒维定理和勒贝格控制收敛定理通常称为勒贝格积分中的三大定理，它们在分析数学中有着广泛的应用. 我们先介绍法都引理(证明从略).

定理 4.7(法都(Fatou)引理) 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的非负可测函数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m \leqslant \sup_n\left\{\int_E f_n(x)\mathrm{d}m\right\}.$$

推论 4.2 当引理中的 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m$ 存在时，

则
$$\int_E f(x)\mathrm{d}m \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m,$$

即 $$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

证 设 $\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m = c$,则对 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时,有

$$c - \varepsilon < \int_E f_n(x)\mathrm{d}m < c + \varepsilon.$$

视 $f_{N+1}(x), f_{N+2}(x), \cdots$ 是一新的函数列,它满足定理 4.7 条件,故有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m \leqslant \sup_{n>N}\left\{\int_E f_n(x)\mathrm{d}m\right\} \leqslant c + \varepsilon < c + 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m \leqslant c = \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

定理 4.8(勒维(Levi)定理) 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的非负可测函数列,且满足 $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(\forall\, x \in E)$,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

即 $$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

证 $f(x)$ 作为非负可测函数列的极限是非负可测函数, $\int_E f(x)\mathrm{d}m$ 有意义,由 $f_n(x) \leqslant f(x)$ 知

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}m. \qquad (*)$$

又因 $\int_E f_1(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_E f_2(x)\mathrm{d}m \leqslant \cdots \leqslant \int_E f_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \cdots$ 是单调增加数列,故 $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m$ 为 $+\infty$ 或有限数 $c(0 \leqslant c < +\infty)$.

当$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=+\infty$时，由(*)式得$\int_E f(x)\mathrm{d}m=+\infty$，结论成立.

当$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=c$时，由推论4.2得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=c,$$

再由(*)式可知

$$c=\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

从而

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=c.$$

引理4.1 设$\{g_n(x)\}$是E上的可测函数列，令

$$u_n(x)=\inf\{g_n(x),g_{n+1}(x),\cdots\}\ (n=1,2,\cdots),$$

则$\{u_n(x)\}$是E上可测函数列. 若$\{g_n(x)\}$有极限函数$g(x)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=g(x)$.

证 $\{u_n(x)\}$显然是单调增加的. 易知$u_n(x)<a$的充要条件是，存在$m\geqslant n$，使$g_m(x)<a$，故$E(u_n<a)=\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}E(g_m<a)$，由于$E(g_m<a)$是可测集，从而$E(u_n<a)$是可测集，即$u_n(x)$是$E$上可测函数. 现设$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$，则对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当$n>N$时，有

$$g(x)-\varepsilon<g_n(x)<g(x)+\varepsilon,$$

此时

$$u_n(x)=\inf\{g_n(x),g_{n+1}(x),\cdots\}\geqslant g(x)-\varepsilon,$$

又显然$u_n(x)\leqslant g_n(x)$，于是当$n>N$时，有

$$g(x)-\varepsilon\leqslant u_n(x)\leqslant g_n(x)<g(x)+\varepsilon.$$

以上不等式表明　$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = g(x)$.

定理 4.9(勒贝格(Lebesgue)控制收敛定理)　设可测集 E 上的可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足下述条件:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;

(2) 存在 L 可积函数 $F(x)$,使 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ ($\forall x \in E$, $n = 1,2,\cdots$).

那么,$f(x)$ 在 E 上 L 可积,且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}m.$$

证　由条件(2)可知 $|f(x)| \leqslant F(x)$, $|f_n(x)| \leqslant F(x)$. 由习题 1.4 第 3 题知 $f(x)$,$f_n(x)$ 在 E 上 L 可积. 记 $g_n(x) = F(x) + f_n(x)$,由条件(2)知 $g_n(x) \geqslant 0$ 且

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = F(x) + f(x).$$

令
$$u_n(x) = \inf\{g_n(x), g_{n+1}(x), \cdots\},$$

则 $u_n(x) \geqslant 0$,由引理 4.1 知 $\{u_n(x)\}$ 是 E 上单调增加的非负可测函数列,并且

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = F(x) + f(x).$$

由定理 4.8,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E u_n(x)\mathrm{d}m = \int_E [F(x) + f(x)]\mathrm{d}m.$$

但 $u_n(x) \leqslant g_n(x)$,故

$$\lim_{n\to\infty}\int_E u_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}m.$$

(可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}m$ 存在).

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [F(x) + f_n(x)]\mathrm{d}m \geqslant \int_E [F(x) + f(x)]\mathrm{d}m.$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}m. \qquad (*)$$

如果我们令 $g_n(x) = F(x) - f_n(x)$，则也有 $g_n(x) \geqslant 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = F(x) - f(x)$，与上面类似可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [F(x) - f_n(x)]\mathrm{d}m \geqslant \int_E [F(x) - f(x)]\mathrm{d}m,$$

即 $$-\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m \geqslant -\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

结合(*)式就有 $$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

推论4.3(勒贝格(Lebesgue)有界收敛定理) 设 $mE < +\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，若存在常数 M，使 $|f_n(x)| \leqslant M$ ($\forall x \in E, n = 1,2,\cdots$)，那么，$f(x)$ 在 E 上 L 可积，且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

证 取定理4.9中的 $F(x)$ 为 M 即可.

说明 (1) 定理4.9中的函数 $F(x)$ 称为控制函数.

(2) 对勒贝格积分，由于改变函数在一个零测集上的值，不影响其可测性、可积性及积分值，因此定理4.8与定理4.9中的条件 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 可改为 $f_n(x) \to f(x)$(a.e.)；定理4.9中的条件 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ 可改为 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$(a.e.).

定理4.10(逐项积分定理) 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的一列非负可测函数，则

$$\int_E \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

证 设 $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$，则 $\{g_n(x)\}$ 满足定理4.8的条件，于是

$$\int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}m.$$

但
$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

$$\int_E g_n(x)\mathrm{d}m = \int_E \Big(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n}\int_E f_k(x)\mathrm{d}m,$$

故

$$\int_E \Big[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\Big]\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}m.$$

这里指出:当有界函数 $f(x)$ 在有限区间上黎曼可积时,它一定是勒贝格可积的,并且二者的积分值相等.这个结论表明勒贝格积分确为黎曼积分的推广.但应当注意的是:对于无穷区间或无界函数,黎曼可积导不出勒贝格可积,但如果 $f(x)$ 保持一定的符号,则上述结论仍然成立.

例 4.4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{nx}{1+n^2x^2}\sin nx\,\mathrm{d}m = 0.$

证 记 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}\sin nx$,则 $f_n(x)$ 在$[0,1]$上连续,故可测. $x=0$ 时, $f_n(x)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$;当 $x\neq 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{x}{\frac{1}{n^2}+x^2}\sin nx = 0$,故在$[0,1]$上 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. 又 $x \in [0,1]$ 时.

$$|f_n(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\sin nx\right| \leqslant \frac{nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{2nx}{1+(nx)^2} \leqslant 1,$$

由 Lebesgue 有界收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\sin nx\,\mathrm{d}m = \int_0^1 0\,\mathrm{d}m = 0.$$

例 4.5 设 $f(t)$ 是$(-\infty,+\infty)$上的 L 可积函数,称

$$\tilde{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt$$

为函数 $f(t)$ 的傅立叶(Fourier)变换. 试证 $\tilde{f}(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

证 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,并任取一数列 $\{h_n\}$,使得 $h_n\to 0(n\to\infty)$. 因为

$$\tilde{f}(x+h_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it(x+h_n)}f(t)dt.$$

令
$$f_n(t)=e^{-it(x+h_n)}f(t),$$
则
$$|f_n(t)|=\left|e^{-it(x+h_n)}f(t)\right|=|f(t)|.$$

由于 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 L 可积,故 $|f(t)|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 L 可积,由勒贝格控制收敛定理立即可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\tilde{f}(x+h_n)&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it(x+h_n)}f(t)dt\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(t)dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(t)dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt=\tilde{f}(x).\end{aligned}$$

因此 $\tilde{f}(x)$ 在 x 处连续,$\tilde{f}(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

例 4.6 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,试计算 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$ 的值.

解 $\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1-x}=-\infty$,$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$ 为 R 广义积分. 因

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1,$$

故 $x=1$ 不是瑕点. 由于 $\lim_{x\to 0+0}x^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x}=0$,故 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$ 收敛. 由

于 $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-x}$ 在(0,1)内恒为负，故其勒贝格积分$\int_0^1\dfrac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}m$存在且与$\int_0^1\dfrac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$ 相等.

因为

$$\ln x=\ln[1-(1-x)]=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n}(x\in(0,1]),$$

所以

$$\frac{\ln x}{1-x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}\ (x\in(0,1)).$$

在区间[0,1]内，$\dfrac{(1-x)^{n-1}}{n}\geqslant 0$，由逐项积分定理可得

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}m&=-\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}m\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-x)^{n-1}}{n}\mathrm{d}m\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-x)^{n-1}}{n}\mathrm{d}x\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6},\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}m=-\frac{\pi^2}{6}.$$

习　题　1.4

1. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

问 $f(x)$ 在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上是否勒贝格可积?若可积，试求出积分的值.

2. 设 $E_1\subset E_2$，E_1、E_2 为 L 可测集，且 $mE_2<+\infty$，f 是E_2 上的非负可

测函数,证明$\int_{E_1} f\mathrm{d}m \leqslant \int_{E_2} f\mathrm{d}m$.

3. 设$f(x)$在L可测集E上L可积,g在E上L可测.如果$x \in E$时$|g(x)| \leqslant f(x)$,证明g在E上L可积.

4. 设$mE < +\infty$,f在E上L可积,证明f在E上几乎处处有限.

5. 设E是L可测集,f在E上L可积,证明f在E上几乎处处有限.

6. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

7. 证明:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+n)^2} \quad (p > -1).$$

8. 设$f_n(x)$为E上的L可积函数($n = 1,2,\cdots$),$f_n(x) \to f(x)$(a.e.)且$\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}m < k$,$k$为常数,证明$f(x)$ L可积.

9. 设$f(x,t)$对每个$t \in [\alpha,\beta]$都是区间$[a,b]$上关于x的勒贝格可积函数,并且存在常数M,使

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right| \leqslant M \ (x \in [a,b],\ t \in [\alpha,\beta]).$$

证明 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x \ (t \in [\alpha,\beta]).$$

10. 设$f(t)$及$tf(t)$是直线$\boldsymbol{R}$上的L可积函数,$\tilde{f}(x)$表示$f(t)$的傅立叶变换,试证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{f}(x) = \mathscr{F}[-itf(t)]$$

其中$\mathscr{F}[-itf(t)]$表示$-itf(t)$的傅立叶变换.

§5 几个常用不等式

本节我们介绍分析中几个常用的不等式.

引理5.1 设函数$f(x)$在区间I上的二阶导数非正,则对任

意 $x_1,x_2 \in I,\lambda_1,\lambda_2 \geqslant 0,\lambda_1+\lambda_2=1$，有

$$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2) \leqslant f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2).$$

证 记 $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2=c$. 将 $f(x)$ 在 c 处泰勒展开，得

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''[c+\theta(x-c)]}{2}(x-c)^2$$

$$(0<\theta<1).$$

由 $f''(x) \leqslant 0\ (x \in I)$，知

$$f(x) \leqslant f(c)+f'(c)(x-c).$$

分别取 x 为 x_1,x_2 得

$$f(x_1) \leqslant f(c)+f'(c)(x_1-c)$$

$$f(x_2) \leqslant f(c)+f'(c)(x_2-c)$$

上面二式分别乘 λ_1,λ_2 后再相加就得到

$$\begin{aligned}\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2) &\leqslant (\lambda_1+\lambda_2)f(c)+f'(c)\\ &\quad [\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2-(\lambda_1+\lambda_2)c]\\ &= f(c)+f'(c)(c-c)\\ &= f(c)=f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2).\end{aligned}$$

引理 5.2(Young 不等式) 设 $a \geqslant 0,b \geqslant 0,p>1,q>1$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则有 $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$.

证 当 $ab=0$ 时，不等式显然成立. 设 $a>0,b>0$. 考虑函数 $f(x)=\ln x$，当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$，在引理 5.1 中令 $x_1=a^p$，$x_2=b^q,\lambda_1=\frac{1}{p},\lambda_2=\frac{1}{q}$，由引理 5.1 有

$$\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right),$$

即

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

定理 5.1(霍尔得 Hölder 不等式) 设 $f(x),g(x)$ 是可测集

E 上的 L 可测函数，$p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$|f(x)|^p$，$|g(x)|^q$ 在E 上L 可积，则有下述不等式：

$$\int_E |f(x)g(x)|\mathrm{d}m$$
$$\leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1.1)$$

证　设$\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m>0, \int_E |g(x)|^q \mathrm{d}m>0$，

令 $$a=\frac{|f(x)|}{\left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}}, b=\frac{|g(x)|}{\left(\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{q}}},$$

由引理5.2有

$$\frac{|f(x)\ g(x)|}{\left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{q}}}$$
$$\leqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{|f(x)|^p}{\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m}+\frac{1}{q}\cdot\frac{|g(x)|^q}{\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}m}.$$

由于$|f(x)|^p$，$|g(x)|^q$ 在E 上L 可积，据上述不等式及习题1.4第3题的结论，知$|f(x)\ g(x)|$在E 上L 可积，对上述不等式两边积分得

$$\frac{\int_E |f(x)\ g(x)|\mathrm{d}m}{\left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{q}}}$$
$$\leqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m}{\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m}+\frac{1}{q}\cdot\frac{\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}m}{\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}m}$$
$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

即

$$\int_E |f(x)\ g(x)|\,\mathrm{d}m$$

$$\leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{q}}.$$

当$\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m = 0$时,可以验证,例 4.3 的结论对 $mE = +\infty$ 及$|f(x)|^p$ 在 E 上无界时也成立,即$|f(x)|^p = 0$ (a.e.),由此得 $|f(x)\ g(x)| = 0$(a.e.),从而$\int_E |f(x)\ g(x)|\,\mathrm{d}m = 0$,(1.1)式两边为零;当$\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}m = 0$时,同理有

$$\int_E |f(x)\ g(x)|\,\mathrm{d}m = 0.$$

综上所述,(1.1) 式成立.

当 $p = q = 2$ 时,霍尔得不等式成为

$$\int_E |f(x)\ g(x)|\,\mathrm{d}m \leqslant \left(\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E |g(x)|^2 \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}},$$

称为柯西－许瓦尔兹(Cauchy-Schwarz) 不等式.

定理 5.2(闵可夫斯基(Minkowski) 不等式) 设 $p \geqslant 1$, $f(x)$,$g(x)$ 在可测集 E 上 L 可测,$|f(x)|^p$,$|g(x)|^p$ 在E 上L 可积,则有下述不等式:

$$\left(\int_E |f(x) \pm g(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.2)$$

证 当 $p = 1$ 时,(1.2) 式显然成立. 设 $p > 1$,由$|f(x)|^p$,$|g(x)|^p$ 在E 上L 可积,

$$(|f| + |g|)^p \leqslant [2\max(|f|, |g|)]^p$$

$$\leqslant (2|f|)^p + (2|g|)^p$$
$$= 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

可知$(|f| + |g|)^p$ 在E 上L 可积.由于

$$|f+g| \leqslant |f| + |g|,$$
$$|f+g|^p \leqslant (|f| + |g|)^p,$$

故$|f+g|^p$ 在E 上L 可积,且有

$$\int_E |f+g|^p \mathrm{d}m \leqslant \int_E (|f| + |g|)^p \mathrm{d}m.$$

当$\int_E (|f| + |g|)^p \mathrm{d}m = 0$时,有$\int_E |f+g|^p \mathrm{d}m = 0$,(1.2)式成立.现设

$$\int_E (|f| + |g|)^p \mathrm{d}m > 0.$$

因$\int_E (|f| + |g|)^p \mathrm{d}m = \int_E (|f| + |g|)(|f| + |g|)^{p-1} \mathrm{d}m$

$$= \int_E |f|(|f| + |g|)^{p-1} \mathrm{d}m + \int_E |g|(|f| + |g|)^{p-1} \mathrm{d}m,$$

对上式右边两个积分分别用霍尔得不等式,得到

$$\int_E (|f| + |g|)^p \mathrm{d}m$$
$$\leqslant \left(\int_E |f|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E (|f| + |g|)^{(p-1)q} \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_E |g|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E (|f| + |g|)^{(p-1)q} \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left[\left(\int_E |f|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left[\int_E (|f| + |g|)^{(p-1)q} \mathrm{d}m\right]^{\frac{1}{q}}.$$

注意到$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，即$q+p=pq$，故$(p-1)q=p$，$1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$.
于是

$$\int_E(|f|+|g|)^p\mathrm{d}m\leqslant\left[\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|g|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$
$$\left[\int_E(|f|+|g|)^p\mathrm{d}m\right]^{\frac{1}{q}},$$

两边除以$\left[\int_E(|f|+|g|)^p\mathrm{d}m\right]^{\frac{1}{q}}$，即得

$$\left[\int_E(|f|+|g|)^p\mathrm{d}m\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|g|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}},$$

从而

$$\left[\int_E|f+g|^p\mathrm{d}m\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_E(|f|+|g|)^p\mathrm{d}m\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|g|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}.$$

将$g(x)$换成$-g(x)$，即得

$$\left(\int_E|f-g|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|g|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}.$$

在离散的情形，也有相应的霍尔得与闵可夫斯基不等式，它们的证明与定理 5.1 及定理 5.2 的证明类似，这里我们仅叙述相应的结论.

定理 5.3（霍尔得不等式） 设$p>1$，$q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$x_i$，$y_i\in\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{C}(i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\qquad(1.3)$$

定理 5.4（闵可夫斯基不等式） 设$p\geqslant1$，x_i，$y_i\in\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{C}$

$(i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i \pm y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4}$$

在(1.3)及(1.4)式中，若右边相应的级数收敛，我们只要在不等式中令 $n \to +\infty$ 就得到级数形式的不等式.

霍尔得：

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

闵可夫斯基：

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i \pm y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(p \geqslant 1).$$

第二章　度量空间

在处理实际问题时，物理系统的状态一般是由观测决定的，而观测值总是近似的，这就要求人们考虑近似值逼近准确值的程度问题，反映在数学上就是极限的概念或收敛性概念. 我们已熟悉数列的极限、函数的极限及函数列的收敛性等概念. 一个数列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，是指 x_n 无限地“趋近”于 x，即 x_n 与 x 之间的“距离”可以无限地减小. 如果 X 是一个抽象的集合，它的元素不一定是数，我们该怎样描述 X 中元素列的收敛性呢？最自然与简单的方法是对 X 中的任意两个元素规定一个“距离”，一个集合上如果定义了距离，就称为距离空间或度量空间. 本章主要介绍度量空间的概念，然后讨论空间的完备性、列紧性与紧性以及可分性.

§1　度量空间的定义

本节先在抽象集合中定义两点间的距离，这种距离是由公理来定义的，然后介绍一些常见的度量空间.

如何在抽象的集合上合理地定义距离呢？我们以所熟悉的二维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \boldsymbol{R}\}$ 为例来进行分析.

平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中任意两点 $p_1(x_1,y_1)$、$p_2(x_2,y_2)$ 之间的距离定义为

$$d(p_1,p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad (2.1)$$

通过对上式进行研究,发现距离具有如下直观而又是本质的属性:

(1) 对任意 $p_1,p_2\in \boldsymbol{R}^2$,由(2.1)式有一个确定的实数与之对应,即(2.1)式确定了一个 $\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射;

(2) 任一点到它自己的距离等于零;两个不同点之间的距离大于零;

(3) 从 p_1 到 p_2 的距离等于从 p_2 到 p_1 的距离;

(4) 两点之间以直线为最短,三角形的两边之和不小于第三边.

概括地说,平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中的距离 d 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的点 p_1,p_2 的"二元"实值函数,满足对 $\forall(p_1,p_2)\in\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2$,有

(1) $d(p_1,p_2)\geqslant 0$,且 $d(p_1,p_2)=0$ 当且仅当 $p_1=p_2$;

(2) $d(p_1,p_2)=d(p_2,p_1)$;

(3) $d(p_1,p_2)\leqslant d(p_1,p_3)+d(p_3,p_2)$.

将上述 $\boldsymbol{R}^2$ 中的距离 d 加以抽象,就得到度量空间的概念.

定义 1.1 设 X 是一非空集合.若存在二元函数 $d:X\times X\to\boldsymbol{R}$,对任何 $x,y,z\in X$,$d(x,y)$ 满足公理:

(1) **非负性** 即 $d(x,y)\geqslant 0$,且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(2) **对称性** $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) **三角不等式** $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$,

则称 $d(x,y)$ 是 X 上的一个**距离函数**,称(X,d)为**度量空间**或**距离空间**;称 $d(x,y)$ 为 x,y 两点间的**距离**. X 的任何子集都视为空间(X,d)的点集,在不产生误解时,将(X,d)简记为 X.

例 1.1 设 $X=\boldsymbol{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n\}$,对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X$,定义

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}. \tag{2.2}$$

d 显然是X上的二元函数,且满足条件(1)及条件(2).对任意 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in X$,由闵可夫斯基不等式有

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i+y_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

即

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z).$$

定义 1.1 中的条件(3)也满足,于是 d 是 $X=\boldsymbol{R}^n$ 上的一个距离函数,称作**欧氏距离**.$(\boldsymbol{R}^n,d)$ 是一个度量空间,称作 n **维欧氏空间**.今后如不作特别申明,凡提到度量空间 $\boldsymbol{R}^n$,均指由上面欧氏距离所定义.

在 $X=\boldsymbol{R}^n$ 中,还可以定义其他距离.例如对于任意

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X,$$

定义

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|; \tag{2.3}$$

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad(p\geqslant 1); \tag{2.4}$$

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|, \tag{2.5}$$

容易验证 d_1,d_p,d_∞ 都是 $X=\boldsymbol{R}^n$ 上的距离函数.可见,同一基本集 $X=\boldsymbol{R}^n$ 上有时可定义不同的距离,但应注意将它们视为不同的度量空间.

对复数集 $\boldsymbol{C}$,若 $x=a_1+ib_1,y=a_2+ib_2\in\boldsymbol{C}$,定义

$$d_2(x,y)=|x-y|=|(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)|$$

$$=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2},$$

易验证$(\boldsymbol{C},d_2)$是度量空间.

定理 1.1 设 $d(x,y)$ 是 X 上的距离函数,则

$$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

也是 X 上的距离函数.

证 考虑函数 $f(t)=\frac{t}{1+t}$ 在$[0,+\infty)$上的单调性. 因 $f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$,故 $f(t)=\frac{t}{1+t}$ 在$[0,+\infty)$上单调增加,由于

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z),$$

于是

$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}\leqslant\frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\\&\leqslant\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

ρ 显然满足定义1.1中的条件(1)与(2),故 $\rho(x,y)$ 也是 X 上的距离函数.

例 1.2 离散度量空间. 设 X 为非空集合,对任意 $x,y\in X$,定义

$$d_0(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=y \text{ 时},\\1, & \text{当 } x\neq y \text{ 时}.\end{cases}\tag{2.6}$$

容易验证 $d_0(x,y)$ 满足距离的三个条件,称 d_0 为**离散距离**,(X,d_0) 称作**离散度量空间**.

例 1.3 连续函数空间 $C[a,b]$. 设 $C[a,b]$ 表示区间$[a,b]$上所有实(复)值连续函数的集合,对任意 $x(t),y(t)\in C[a,b]$,定义

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|.\tag{2.7}$$

显然 d 满足距离的条件(1)、(2),下面验证 d 满足条件(3).

设 $$x(t),y(t),z(t)\in C[a,b],$$

因对 $\forall t\in[a,b]$,均有

$$
\begin{aligned}
|x(t)-z(t)| &\leqslant |x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)| \\
&\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)-z(t)| \\
&= d(x,y)+d(y,z).
\end{aligned}
$$

从而有

$$d(x,z)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|\leqslant d(x,y)+d(y,z).$$

故$(C[a,b],d)$是度量空间,称作**连续函数空间**,简记为$C[a,b]$.

例 1.4 有界数列空间l^∞.设l^∞表示所有有界实(复)数列$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)=(\xi_i)$所成的集合,即对任一$x=(\xi_i)\in l^\infty$,都有常数$M_x$,使

$$|\xi_i|\leqslant M_x \quad (i=1,2,\cdots,n,\cdots).$$

设

$$x=(\xi_i),\quad y=(\eta_i)\in l^\infty,$$

令

$$d(x,y)=\sup_{i\geqslant 1}|\xi_i-\eta_i|. \tag{2.8}$$

易验证d满足距离的三个条件,称(l^∞,d)为**有界数列空间**,简记为l^∞.

例 1.5 p次幂可和的数列空间$l^p(p\geqslant 1)$.设l^p是满足$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty$的所有实(复)数列$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)=(\xi_i)$的集合,又设$y=(\eta_i)\in l^p$,令

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.9}$$

由闵可夫斯基不等式知定义(2.9)式是有意义的.

显然,d_p满足距离的条件(1)、(2).对$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots)\in l^p$,由闵可夫斯基不等式,有

$$d_p(x,z) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \zeta_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i + \eta_i - \zeta_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i - \zeta_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$= d_p(x,y) + d_p(y,z).$$

于是d_p也满足距离的条件(3),称(l^p, d_p)为**p次幂可和的数列空间**,简记为l^p.

例 1.6 p次幂L可积函数空间$L^p[a,b]$ $(p \geqslant 1)$.

若函数$|f(t)|^p (p \geqslant 1)$在$[a,b]$上L可积,则称f是p次幂L可积的函数.记$L^p[a,b] = \{x(t) \mid x(t)$在$[a,b]$上$p$次幂$L$可积$\}$.在$L^p[a,b]$中,我们把几乎处处相等的函数视为同一函数,即若$x(t) = y(t)$ (a.e.),则规定$x = y$. $L^p[a,b]$有下列重要性质.

(1) 对线性运算是封闭的.即若$f, g \in L^p[a,b]$,则
$$\alpha f \in L^p[a,b], f + g \in L^p[a,b],$$
其中α是常数.

因为
$$\int_a^b |\alpha f|^p \mathrm{d}m = |\alpha|^p \int_a^b |f|^p \mathrm{d}m < +\infty,$$
故$\alpha f \in L^p[a,b]$.而由闵可夫斯基不等式即知$f + g \in L^p[a,b]$.

(2) $L^p[a,b] \subset L[a,b]$ $(p \geqslant 1)$.

设$f \in L^p[a,b]$,令$A = E(|f| \geqslant 1)$,
$$B = E(|f| < 1), E = [a,b],$$
则
$$\int_a^b |f| \mathrm{d}m = \int_A |f| \mathrm{d}m + \int_B |f| \mathrm{d}m$$

$$\leqslant \int_A |f|^p \mathrm{d}m + \int_B \mathrm{d}m$$

$$\leqslant \int_a^b |f|^p \mathrm{d}m + (b-a) < +\infty.$$

故 $f \in L[a,b]$.

(3) 对 $x(t), y(t) \in L^p[a,b]$,令

$$d_p(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.10)$$

则 $d_p(x,y)$ 是 $L^p[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 中的距离.事实上,显然有 $d_p(x,y) = d_p(y,x)$,且 $d_p(x,y) \geqslant 0$, $d_p(x,x) = 0$;如 $d_p(x,y) = 0$,则有 $x(t) - y(t) = 0$(a.e.),即 $x(t) = y(t)$ (a.e.),按我们的规定有 $x = y$.利用闵可夫斯基不等式,容易证明三角不等式成立.因此 $(L^p[a,b], d_p)$ 是度量空间,称为 **p 次幂 L 可积函数空间**,简记为 $L^p[a,b]$.

最后,我们介绍几个概念.

定义 1.2 设 (X,d) 是度量空间,$A \subset X$,若将距离函数 d 限制在 $A \times A$ 上,则 A 显然也是一个度量空间,称作 X 的**子空间**.

若 $x \in X$, $A \subset X$,则**点 x 到集 A 的距离**定义为:

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y). \qquad (2.11)$$

集合 A 的直径定义为:

$$\mathrm{dia}A = \sup_{x,y \in A} d(x,y). \qquad (2.12)$$

若 $\mathrm{dia}A$ 为有限,则称 A 为有界集;若 $\mathrm{dia}A = +\infty$,则称 A 为无界集.

习　题　2.1

1. 在 $\boldsymbol{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}\}$ 中,若 $x = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \boldsymbol{R}^2$,问

(1) $d_1(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ 是否构成距离函数?

(2) $d_2(x,y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{\frac{1}{4}}$ 是否构成距离函数?

2. 设 X 按 $d(x,y)$ 是度量空间, $n\in\mathbf{N}$, 证明 $d_1(x,y)=\sqrt[n]{d(x,y)}$ 是距离函数.

3. 设 (X,d) 是度量空间, 证明

(1) $|d(x,y)-d(y,z)|\leqslant d(x,z)$ $(\forall x、y、z\in X)$;

(2) $|d(x,y)-d(z,w)|\leqslant d(x,z)+d(y,w)$ $(\forall x、y、z、w\in X)$.

4. 令 s 表示实数列(或复数列)的全体, 对 s 中任意两点

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots),\ y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots),$$

令

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}.$$

证明 (s,d) 是度量空间.

5. 设 E 是测度有限的 L 可测集, $\mathfrak{M}(E)$ 是 E 上实值的 L 可测函数全体, 对任意 $x(t),y(t)\in\mathfrak{M}(E)$, 定义

$$d(x,y)=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}m.$$

如果把 $\mathfrak{M}(E)$ 中两个几乎处处相等的函数视为 $\mathfrak{M}(E)$ 中同一个函数, 证明 $(\mathfrak{M}(E),d)$ 是度量空间.

6. 证明定义 1.1 中的对称性条件, 可由非负性及不等式 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$ $(\forall x,y,z\in X)$ 所得到.

§2 度量空间的拓扑性质

本节将在度量空间中从定义内点出发, 定义开集、闭集、聚点、连续、极限等概念, 然后讨论它们的性质及其关系. 我们省略了一些定理的证明, 留给读者作为练习.

§2.1 开集、闭集与邻域

设 (X,d) 是度量空间, $x_0\in X$, $\delta>0$, 称集合 $B(x_0,\delta)=\{x\mid d(x,x_0)<\delta,x\in X\}$ 是以 x_0 为中心, δ 为半径的**开球**, 或

x_0 的一个 δ **邻域**.

仿第一章 §2.2,有如下几个定义.

(1) 内点:设 $E \subset X, x_0 \in E$,若存在点 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta) \subset E$,则称点 x_0 为 E 的**内点**.

(2) 开集:设 $G \subset X$,若 G 中每一点都是其内点,则称 G 为**开集**.定义空集 $\varnothing$ 为开集.

(3) 聚点:设 $E \subset X, x_0 \in X$,若 x_0 的每一个 δ 邻域内都含有无穷多个 E 的点,则称 x_0 是 E 的一个**聚点**.E 的聚点可以在 E 中也可不在 E 中.x_0 为 E 的聚点的等价定义为:x_0 的每个 δ 邻域中至少含有一个属于 E 而异于 x_0 的点.

(4) 邻域:设 $x_0 \in X$,任一包含 x_0 的开集都称为 x_0 的**邻域**.特别称开集 $B(x_0, \delta)$ (见例 2.1) 为 x_0 的**球形邻域**,有时也简称邻域.

(5) 闭集:设 $F \subset X$,若 $X \setminus F$ 是开集,则称 F 为**闭集**.

(6) 导集:E 的聚点全体称为 E 的**导集**,记为 E'.

(7) 闭包:设 $E \subset X$,E 的**闭包** $\overline{E}$ 定义为

$$\overline{E} = E \cup E'.$$

$\overline{E}$ 中的点又称为 E 的**接触点**.易知 $x_0 \in \overline{E}$ 当且仅当 $d(x_0, E) = 0$,因此 E 的闭包 $\overline{E}$ 又可定义为与 E 的距离为0的一切点的全体.

(8) 孤立点:设 $E \subset X$.如果 $x_0 \in E$,但 $x_0 \notin E'$,则称 x_0 是 E 的**孤立点**.易知,x_0 是 E 的孤立点的充要条件是存在 $\delta > 0$,使 $B(x_0, \delta) \cap E = \{x_0\}$.

与第一章 §2.2 类似,也可定义 E 的**边界点**及**边界**等概念.

例 2.1 任一开球 $B(x_0, \delta)$ 是开集.

证 对 $\forall x_1 \in B(x_0, \delta)$,则 $d(x_1, x_0) < \delta$,取正数 $\varepsilon \leqslant \delta - d(x_1, x_0)$.下面证明 $B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, \delta)$,从而 $B(x_0, \delta)$ 是开集.对 $\forall y \in B(x_1, \varepsilon)$,则 $d(y, x_1) < \varepsilon$,于是

$$
\begin{aligned}
d(y,x_0) &\leqslant d(y,x_1) + d(x_1,x_0) \\
&< \varepsilon + d(x_1,x_0) \\
&\leqslant \delta - d(x_1,x_0) + d(x_1,x_0) = \delta,
\end{aligned}
$$

即

$$
y \in B(x,x_0), \quad B(x_1,\varepsilon) \subset B(x_0,\delta).
$$

例 2.2 设(X,d)是度量空间,记

$$
\overline{B}(x_0,\delta) = \{x \mid d(x,x_0) \leqslant \delta, x \in X\},
$$

这里 $x_0 \in X, \delta > 0$,称 $\overline{B}(x_0,\delta)$ 为以 x_0 为中心,δ 为半径的**闭球**. 证明闭球 $\overline{B}(x_0,\delta)$ 是闭集. (注:为区别起见,我们记开球 $B(x_0,\delta)$ 的闭包为$\overline{B(x_0,\delta)}$)

证 设

$$
G = X \setminus \overline{B}(x_0,\delta) = \{x \mid d(x,x_0) > \delta, x \in X\},
$$

只需证明 G 是开集即可. 对 $\forall x_1 \in G$,则 $d(x_1,x_0) > \delta$,取正数 $\varepsilon \leqslant d(x_1,x_0) - \delta$,下面证明 $B(x_1,\varepsilon) \subset G$,从而 G 是开集. 事实上,对 $\forall y \in B(x_1,\varepsilon)$,有 $d(y,x_1) < \varepsilon, d(y,x_0) \geqslant d(x_1,x_0) - d(y,x_1) > d(x_1,x_0) - \varepsilon \geqslant d(x_1,x_0) - (d(x_1,x_0) - \delta) = \delta$,即 $y \in G, B(x_1,\varepsilon) \subset G$.

例 2.3 设(X,d_0)是离散度量空间,A 是 X 的任一非空子集,证明 A 既是开集又是闭集.

证 对 $\forall x_0 \in A$,取 $\delta = \frac{1}{2}$,则

$$
\begin{aligned}
B\left(x_0,\frac{1}{2}\right) &= \left\{x \mid d_0(x,x_0) < \frac{1}{2}, x \in X\right\} \\
&= \{x_0\} \subset A,
\end{aligned}
$$

故 x_0 是 A 的内点,从而 A 是开集. 由于 $X \setminus A$ 是 X 的子集,故它是开集,从而 A 是闭集.

我们知道,在一维欧氏空间(即实直线)$\mathbf{R}$ 中,只有 $\mathbf{R}$ 与 $\varnothing$ 是

既开又闭的集,但在度量空间中问题就没有这样简单了.在学习抽象的度量空间时,我们可广泛地借助所熟悉的 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{R}^2$ 及 $\boldsymbol{R}^3$ 中的一些几何直观事实,但有时几何直观会给我们带来错觉,应特别予以警惕.例如,在 $\boldsymbol{R}^3$ 中,开球 $B(x_0,\delta)=\{x \mid d(x,x_0)<\delta, x\in \boldsymbol{R}^3\}$ 的闭包无疑是闭球 $\overline{B}(x_0,\delta)=\{x \mid d(x,x_0)\leqslant\delta, x\in \boldsymbol{R}^3\}$,球面 $S(x_0,\delta)=\{x \mid d(x,x_0)=\delta, x\in \boldsymbol{R}^3\}$ 上每一点都是 $B(x_0,\delta)$ 的聚点且是边界点,$S(x_0,\delta)$ 是 $B(x_0,\delta)$ 的边界.但在离散度量空间 (X,d_0) 中,若取 $\delta=1$,则开球

$$B(x_0,1)=\{x \mid d_0(x,x_0)<1, x\in X\}=\{x_0\}.$$

对

$$\forall x_1\in X,\quad B\left(x_1,\frac{1}{2}\right)=\{x_1\},$$

$$B\left(x_1,\frac{1}{2}\right)\cap[B(x_0,1)\setminus\{x_1\}]$$
$$=\{x_1\}\cap[\{x_0\}\setminus\{x_1\}]=\varnothing,$$

故任意 x_1 都不是 $B(x_0,1)=\{x_0\}$ 的聚点,即 $B(x_0,1)$ 的导集是空集,$B(x_0,1)$ 的闭包是 $\{x_0\}$.但闭球 $\overline{B}(x_0,1)=\{x \mid d_0(x,x_0)\leqslant 1, x\in X\}=X$,只要 X 不是单点集,则 $X\neq\{x_0\}$,即闭球 $\overline{B}(x_0,1)$ 并不是开球 $B(x_0,1)$ 的闭包.

下面是一些与 $\boldsymbol{R}$ 相类似的性质,仿照 $\boldsymbol{R}$ 中相应命题的证明有下列几个定理.

定理 2.1 对度量空间 (X,d) 有

(1) 任意个开集的并集是开集;有限个开集的交集是开集;

(2) 任意个闭集的交集是闭集;有限个闭集的并集是闭集;

(3) X 与 $\varnothing$ 既是开集又是闭集.

定理 2.2 设 (X,d) 是度量空间,$x_0\in X, E\subset X$,则 x_0 是 E 的聚点的充要条件是存在 E 中点列 $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$,使 $d(x_n,x_0)\to 0\ (n\to\infty)$.

定理 2.3 设(X,d)是度量空间,$E \subset X$,$x \in E$,则下面的三个陈述是等价的:

(1) $x \in \overline{E}$;

(2) x 的任一邻域中都有E 的点;

(3) 有点列 $x_n \in E$,使 $d(x_n,x) \to 0\ (n \to \infty)$.

证 (1)⇒(2) 设 $x \in \overline{E}$,若 $x \in E$,则(2) 显然成立.若 $x \notin E$,则 $x \in E'$,由聚点定义知(2) 成立.

(2)⇒(3) 设 x 的邻域$B\left(x,\dfrac{1}{n}\right)$中有$E$ 的点$x_n(n = 1,2,\cdots)$.

因 $d(x_n,x) < \dfrac{1}{n}$,故 $d(x_n,x) \to 0(n \to \infty)$.

(3)⇒(1) 设 $x_n \in E$,且 $d(x_n,x) \to 0(n \to \infty)$.若 $x \in E$,则 $x \in \overline{E}$.若 $x \notin E$,则 $x_n \neq x(n = 1,2,\cdots)$,对 x 的每一δ 邻域 $B(x,\delta)$,由 $d(x_n,x) \to 0$ 知存在 $N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时,$d(x_n,x) < \delta$,即 $x_n \in B(x,\delta)$,由聚点的等价定义知 x 是E 的聚点,即 $x \in E'$,从而 $x \in \overline{E}$.

请读者将上述定理的证明过程与上一章定理 2.12 的证明过程作个对比.

定理 2.4 设(X,d)是度量空间,E 是X 的非空子集,则 E 为闭集的充要条件是 $E' \subset E$.

推论 2.1 若 $E' = \varnothing$,则 E 是闭集.

推论 2.2 非空点集 E 为闭集的充要条件是:对 E 中每个点列$\{x_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$,则 $x \in E$.

定理 2.5 设(X,d)是度量空间,$E \subset X$,则 E 为闭集的充要条件是 $E = \overline{E}$.

§2.2 度量空间中点列的收敛性

在集合 X 的任意两个元素或点之间定义了距离之后,我们就

能很自然地描述 X 中点列的收敛性了.

定义 2.1 设 (X,d) 是度量空间,$x \in X$,$\{x_n\}$ 是 X 中点列,若 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$,则称点列 $\{x_n\}$ **收敛**于 x,称 x 为点列 $\{x_n\}$ 的**极限**. 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$,或 $x_n \xrightarrow{d} x(n\to\infty)$ 或 $x_n \to x(n\to\infty)$.

$\{x_n\}$ 收敛于 x 用"ε—N"语言描述是:对 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时,恒有 $d(x_n,x) < \varepsilon$ 成立.

若点列 $\{x_n\}$ 不收敛,则称其**发散**.

例 2.4 设 X 是实数集,数列 $x_n = \dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$. 若在 X 上定义欧氏距离

$$d_u(x,y) = |x-y| \quad (x,y \in X),$$

显然,数列 $\{x_n\}$ 在度量空间 (X,d_u) 中收敛于 0. 若在 X 上定义离散距离

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases} \quad (x,y \in X),$$

则数列 $\{x_n\}$ 在度量空间 (X,d_0) 中是发散的. 因为对任意给定的 $x \in X$,当 n 充分大时,有

$$\frac{1}{n} \neq x, d_0\left(\frac{1}{n},x\right) = 1, \lim_{n\to\infty} d_0\left(\frac{1}{n},x\right) \neq 0,$$

因此数列 $\{x_n\}$ 不收敛于 x. 虽然 (X,d_u) 与 (X,d_0) 有共同的基本集 X,但由于定义的距离不同,它们是两个不同的度量空间,我们看到,同一点列 $\{x_n\}$ 在一个度量空间中收敛,在另一度量空间中发散.

度量空间中点列的收敛性保持了欧氏空间中点列收敛性的许多基本性质.

定理 2.6 设 (X,d) 是度量空间.

(1) X 中任何收敛点列 $\{x_n\}$ 的极限是惟一的;

(2) 若点列 $x_n \to x(n\to\infty)$,则 $\{x_n\}$ 的任何子列 $x_{n_k}\to x(k\to\infty)$;

(3) 若将收敛点列 $\{x_n\}$ 看作是 X 的子集,则它是有界集.

证 (1) 设 $x_n\to x$ 且 $x_n\to y(n\to\infty)$,按定义,对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,有

$$d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2},d(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2},$$

故当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}d(x,y)&\leqslant d(x,x_n)+d(x_n,y)\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性,$d(x,y)=0$,从而 $x=y$.

(2) 设 $x_n\to x(n\to\infty)$,$\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列.

按定义,对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,$d(x_n,x)<\varepsilon$,由于 $k>N$ 时,$n_k\geqslant k>N$,故 $d(x_{n_k},x)<\varepsilon$,即 $x_{n_k}\to x(k\to\infty)$.

(3) 设 $x_n\to x(n\to\infty)$,则对 $\varepsilon_0=1,\exists N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,$d(x_n,x)<\varepsilon_0=1$,记

$$M=\max\{d(x_1,x),\cdots,d(x_N,x),1\},$$

则对 $\forall n\in\mathbf{N},d(x_n,x)\leqslant M$,于是对 $\forall n,m\in\mathbf{N},d(x_n,x_m)\leqslant d(x_n,x)+d(x,x_m)\leqslant M+M=2M$.这表明 $\{x_n\}$ 作为点集,其直径不超过 $2M$.即 $\{x_n\}$ 作为点集有界.

下面讨论常见的度量空间中点列收敛的具体含义.

例 2.5 在 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中,设

$$x_i=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})\ (i=1,2,\cdots,n,\cdots),$$

$$x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}),$$

则 $x_i\to x_0(i\to\infty)$ 意味着

$$d_2(x_i,x_0)=\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j^{(i)}-x_j^{(0)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\to 0\ (i\to\infty).$$

它等价于

$$x_j^{(i)}-x_j^{(0)}\to 0\ (i\to\infty)\ (j=1,2,\cdots,n),$$

故在 $\boldsymbol{R}^n$ 中点列收敛就是**按坐标收敛**.

例 2.6 在连续函数空间 $C[a,b]$ 中,设 $x_n=x_n(t),x=x(t)\in C[a,b]$,且 $x_n\to x(n\to\infty)$,这时

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|=0.$$

由上一章定义 2.12 易知 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$,所以 $C[a,b]$ 中的点列收敛就是函数列的**一致收敛**.

例 2.7 在有界数列空间 l^∞ 中,设 $x_n=\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots\},x_0=\{x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_k^{(0)},\cdots\}\in l^\infty$,且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 为描述上述收敛性,我们引入一个新的术语. 设有一列收敛的数列:$x_j^{(n)}\to x_j^{(0)}(j=1,2,\cdots,k,\cdots)$,若对 $\forall\varepsilon>0$,存在一个与 j 无关的 $N\in\mathbf{N}$(即 N 只与 ε 有关),当 $n>N$,对任意 $j=1,2,\cdots,k,\cdots$,都有

$$|x_j^{(n)}-x_j^{(0)}|<\varepsilon \tag{2.13}$$

成立,则称这一列数列是**一致收敛**的. 下面我们再来看 l^∞ 中点列的收敛性.

$$x_n\to x_0\Longleftrightarrow d(x_n,x_0)=\sup_{j\geqslant 1}|x_j^{(n)}-x_j^{(0)}|\to 0\ (n\to\infty)$$

$\Longleftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,

$$\sup_{j\geqslant 1}|x_j^{(n)}-x_j^{(0)}|\leqslant\varepsilon.$$

$\Longleftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,对任意 $j=1,2,\cdots,k,\cdots$,都有

$$|x_j^{(n)}-x_j^{(0)}|\leqslant\varepsilon.$$

因此 l^∞ 中点列的收敛,就是**按坐标一致收敛**.

例 2.8 在 p 次幂可和的数列空间 $l^p(p\geqslant 1)$ 中,设 $x_n=$

$(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots), x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_k^{(0)}, \cdots) \in l^p$，且 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$，这时

$$\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{j=1}^{\infty} | x_j^{(n)} - x_j^{(0)} |^p \Big]^{\frac{1}{p}} = 0,$$

即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，

$$\Big[\sum_{j=1}^{\infty} | x_j^{(n)} - x_j^{(0)} |^p \Big]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

此时，对任意 $j = 1, 2, \cdots, k, \cdots$，都有

$$| x_j^{(n)} - x_j^{(0)} | \leqslant \Big[\sum_{j=1}^{\infty} | x_j^{(n)} - x_j^{(0)} |^p \Big]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

因此，x_n 按坐标一致收敛于 x_0. 但是，x_n 按坐标一致收敛于 x_0 却得不出 x_n 收敛于 x_0 的结论（见习题 2.2 第 7 题）.

例 2.9 在 p 次幂 L 可积函数空间 $L^p[a, b]$ $(p \geqslant 1)$ 中，若 $x_n = x_n(t), x_0 = x_0(t) \in L^p[a, b]$，则 $x_n \to x_0$ 是指 $d_p(x_n, x_0) \to 0$，即

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b | x_n(t) - x_0(t) |^p \mathrm{d}m = 0. \qquad (2.14)$$

这种收敛称为函数列 $x_n(t)$ 在 $[a, b]$ 上 **p 方平均收敛**于 $x_0(t)$，有时也简称 $x_n(t)$ **平均收敛**于 $x_0(t)$. p 方平均收敛与依测度收敛之间有如下关系：

若 $x_n(t)$ 在 $[a, b]$ 上 p 方平均收敛于 $x_0(t)$，则它在 $[a, b]$ 上依测度收敛于 $x_0(t)$.

事实上，记 $E = [a, b]$，对 $\forall \varepsilon > 0$，因

$$\begin{aligned}[d_p(x_n, x_0)]^p &= \int_a^b | x_n(t) - x_0(t) |^p \mathrm{d}m \\ &\geqslant \int_{E(| x_n(t) - x_0(t) | \geqslant \varepsilon)} | x_n(t) - x_0(t) |^p \mathrm{d}m \\ &\geqslant \varepsilon^p m[E(| x_n(t) - x_0(t) | \geqslant \varepsilon)],\end{aligned}$$

由 $n\to\infty$ 时$[d_p(x_n,x_0)]^p\to 0$ 知

$$\lim_{n\to\infty} m[E(|x_n(t)-x_0(t)|\geqslant\varepsilon)]=0.$$

但依测度收敛并不一定导致 p 方平均收敛. 例如,作$[0,1]$区间上的函数列$\{x_n(t)\}$如下:

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & t=0\text{ 或}\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1,\\ e^n, & 0<t<\frac{1}{n}.\end{cases}$$

显然,$\{x_n(t)\}$在$[0,1]$上处处收敛于零,由勒贝格定理(第一章定理 3.8) 知,$\{x_n(t)\}$在$[0,1]$上依测度收敛于零.

因

$$\begin{aligned}[d_p(x_n,0)]^p &= \int_0^1 |x_n(t)|^p\mathrm{d}m\\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} e^{pn}\mathrm{d}m=\frac{1}{n}e^{np}\to\infty(n\to\infty),\end{aligned}$$

故$\{x_n(t)\}$不是 p 方平均收敛于 0.

另外, 当$\{x_n(t)\}$ p 方平均收敛时也并不导致$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上处处收敛或几乎处处收敛. (见习题 2.2 第 6 题)

§2.3 映射的连续与一致连续性

定义 2.2 设有两个度量空间(X,d),(Y,ρ),映射 $f:X\to Y$,$x_0\in X$. 若对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$,使当 $x\in X$ 且 $d(x,x_0)<\delta$ 时,就有

$$\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon, \qquad (2.15)$$

则称映射 f **在 x_0 点连续**.

若映射 f 在 X 的每一点都连续,则称 f **在 X 上连续**或 f 是 X 上**的连续映射**.

一般说来,f 在 x_0 连续,对 $\forall\varepsilon>0$,δ 与 x_0 及 ε 有关. 如果 f

在 X 上连续,且 δ 与x_0 无关,则称 f 在X 上**一致连续**,即 f 在X 上一致连续是指:对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$,只要 $x_1, x_2 \in X$,且 $d(x_1, x_2) < \delta$,就有 $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ 成立.

例 2.10 $f(x) = x^2$ 是 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续函数.

例 2.11 设(X,d)、(Y,ρ)是两个度量空间,$f:X \to Y$ 定义为 $f(x) = y_0$,其中 y_0 是 Y 中某个固定的点. f 是X 到 Y 的常值映射,它是连续映射.

例 2.12 设 $X = L^2[a,b]$, $f:X \to X$ 定义为对 $\forall x(t) \in L^2[a,b]$, $fx(t) = \int_a^t x(s)\mathrm{d}m \ (a \leqslant t \leqslant b)$, $fx(t)$ 显然是定义在 $[a,b]$ 上的函数,由 L 积分的绝对连续性知 $fx(t)$ 是$[a,b]$ 上的连续函数,从而 $fx(t) \in L^2[a,b]$. 设 $x_1(t), x_2(t) \in L^2[a,b]$,因

$$
\begin{aligned}
|fx_1(t) - fx_2(t)| &= \left|\int_a^t [x_1(s) - x_2(s)]\mathrm{d}m\right| \\
&\leqslant \int_a^b |x_1(s) - x_2(s)|\,\mathrm{d}m \\
&\leqslant \left(\int_a^b 1^2 \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |x_1(t) - x_2(t)|^2 \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (b-a)^{\frac{1}{2}} d_2(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
d_2(fx_1, fx_2) &= \left(\int_a^b |fx_1(t) - fx_2(t)|^2 \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int_a^b (b-a) d_2^2(x_1, x_2)\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (b-a) d_2(x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

对 $\forall \varepsilon > 0$,取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$,当 $x_1(t), x_2(t) \in L^2[a,b]$ 且

$d_2(x_1,x_2) < \delta$ 时，

$$d_2(fx_1,fx_2) \leqslant (b-a)d_2(x_1,x_2) < \varepsilon,$$

故映射 f 在 X 上一致连续.

定理 2.7 设(X,d)、(Y,ρ)是两个度量空间，$f:X\to Y$，则以下陈述是等价的：

(1) f 在 $x_0\in X$ 连续；

(2) 对于 $f(x_0)$ 的任一 ε 邻域 $B(f(x_0),\varepsilon)$，必存在 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0,\delta)$，使 $f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$；

(3) 对于 X 中任一点列 $\{x_n\}$，若 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，则必有

$$f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty).$$

证 (1)$\Longrightarrow$(2) 由 f 在 x_0 连续的定义，这是显然的.

(2)$\Longrightarrow$(3) 设 X 中点列 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 对 $\forall\varepsilon>0$，由条件(2)，存在 $\delta>0$，使 $f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$. 对上述 $\delta>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，$d(x_n,x_0)<\delta$，即 $x_n\in B(x_0,\delta)$，从而 $f(x_n)\in B(f(x_0),\varepsilon)$. 即 $\rho(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$，这表明 $f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$.

(3)$\Longrightarrow$(1) 用反证法. 设 f 在 x_0 不连续，则 $\exists\varepsilon_0>0$，对

$$\delta_n=\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots),\ \exists x_n\in X,$$

使 $d(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$，但 $\rho(f(x_n),f(x_0))\geqslant\varepsilon_0$，于是 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，但 $f(x_n)$ 不收敛于 $f(x_0)$，这与条件(3)相矛盾，故 f 在 x_0 连续.

定理 2.8 设(X,d)，(Y,ρ)是两个度量空间，$f:X\to Y$，则以下陈述是等价的：

(1) f 是连续映射；

(2) 对于 Y 中任一开集 G，G 的原象 $f^{-1}(G)$ 是 X 中开集；

(3) 对于 Y 中任意闭集 F, F 的原象 $f^{-1}(F)$ 是 X 中闭集.

证 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 $f:X\to Y$ 是连续映射, G 是 Y 中开集. 若 $f^{-1}(G)=\varnothing$, 结论成立. 设 $f^{-1}(G)\neq\varnothing$, 任取 $x_0\in f^{-1}(G)$, 则 $y_0=f(x_0)\in G$, 由 G 是开集知 $\exists\,\varepsilon>0$, 使 $B(y_0,\varepsilon)\subset G$. 由 f 在 x_0 连续及定理 2.7, $\exists\,\delta>0$, 使 $f(B(x_0,\delta))\subset B(y_0,\varepsilon)\subset G$, 从而 $B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(G)$, 即 x_0 是 $f^{-1}(G)$ 的内点, $f^{-1}(G)$ 为开集.

(2)$\Longrightarrow$(3) 设 F 是 Y 中闭集, 则 $Y\setminus F$ 是 Y 中开集. 由于 $f^{-1}(Y\setminus F)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(F)$ (第一章定理 1.3) 由条件(2), $X\setminus f^{-1}(F)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(F)=f^{-1}(Y\setminus F)$ 是 X 中开集, 从而 $f^{-1}(F)$ 是 X 中闭集.

(3)$\Longrightarrow$(1) 对 $\forall\,x_0\in X$, $\forall\,\varepsilon>0$, 令 $G=B(f(x_0),\varepsilon)$, 则 G 是 Y 中开集, $Y\setminus G$ 是 Y 中闭集, 由 (3) 知 $f^{-1}(Y\setminus G)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(G)=X\setminus f^{-1}(G)$ 是 X 中闭集, 从而 $f^{-1}(G)$ 是 X 中开集. 又 $f(x_0)\in G=B(f(x_0),\varepsilon)$, 即 $x_0\in f^{-1}(G)$, 故 $\exists\,\delta>0$, 使 $B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(G)$, 于是

$$f(B(x_0,\delta))\subset f[f^{-1}(G)]\subset G=B(f(x_0),\varepsilon).$$

由定理 2.7, f 在 x_0 连续, 由 x_0 的任意性, f 在 X 上连续.

定义 2.3 设(X,d), (Z,ρ) 是两个度量空间, $f:X\times X\to Z$, 点$(x_0,y_0)\in X\times X$, 若对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta=\delta(x_0,y_0,\varepsilon)>0$, 使得当$(x,y)\in X\times X$, 且 $d(x,x_0)<\delta$, $d(y,y_0)<\delta$ 时, 恒有 $\rho(f(x,y),f(x_0,y_0))<\varepsilon$ 成立, 则称**二元映射** f 在(x_0,y_0)点是**连续**的.

若 f 在 $X\times X$ 上每一点都连续, 则称 f 是 $X\times X$ 上的**连续二元映射**. 若上述 δ 与点(x_0,y_0)无关, 则称 f 在 $X\times X$ 上**一致连续**.

定理 2.9 度量空间(X,d)中的距离函数 $d(x,y)$ 是 $X\times X$ 上的连续二元函数.

证 d 是 $X\times X$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的二元函数. 设 $(x_0,y_0)\in X\times X$, $(x,y)\in X\times X$, 由习题2.1第3题,有

$$|d(x,y)-d(x_0,y_0)|\leqslant d(x,x_0)+d(y,y_0).$$

对 $\forall\varepsilon>0$,只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$,当 $d(x,x_0)<\delta, d(y,y_0)<\delta$ 时,就有

$$\begin{aligned}|d(x,y)-d(x_0,y_0)|&\leqslant d(x_0,x)+d(y,y_0)\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $d(x,y)$ 是一致连续的,当然也是连续的.

最后,介绍一下同胚映射的概念. 设 X,Y 都是度量空间, $f:X\to Y$. 如果 f 是一个双射,且 f 与 f 的逆映射 f^{-1} 都连续,则称 f 是 X 到 Y 上的**同胚映射**或**拓扑映射**. 如果存在一个从 X 到 Y 的同胚映射,则称 X 与 Y 为**拓扑同胚**. 当 X 与 Y 拓扑同胚时,X 与 Y 的点一一对应,由定理2.8不难知道 X 中开集与 Y 中开集一一对应,这样,空间 X 与 Y 有完全相似的开集结构. 我们称拓扑映射下保持不变的性质为**拓扑性质**,这样,度量空间中的开集、闭集等都具有拓扑性质.

习 题 2.2

1. 设 X 是度量空间,非空集 $A\subset X$,证明:A 是开集当且仅当它是开球的并.

2. 证明:

(1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(2) $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

3. 设 X 是度量空间,$A\subset X$,称 $\mathring{A}=\{x\mid x 是 A 的内点\}$ 为 A 的内部,证明 $\mathring{A}$ 是开集;证明 $\overline{A}$ 是闭集.

4. 证明:

(1) 度量空间中的闭集必可表示为可数个开集的交;

(2) 度量空间中的开集必可表示为可数个闭集的并.

5. 设 $X=\boldsymbol{R}$,对 $x,y\in\boldsymbol{R}$,令

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ \max\{|x|,|y|\}, & x\neq y.\end{cases}$$

(1) 证明 d 是 X 上的距离函数;

(2) 在度量空间 (X,d) 中取 $x_n=1,y_n=-\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,证明 $x_n\to 1,y_n\to 0(n\to\infty)$,但 x_n+y_n 不收敛于 1,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

6. 在 p 次幂 L 可积函数空间 $L^p[0,1]$ $(p\geqslant 1)$ 中,取 $x_{11}(t)=1,0\leqslant t\leqslant 1$,

$$x_{21}(t)=\begin{cases}1,0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 0,\dfrac{1}{2}<t\leqslant 1.\end{cases}\qquad x_{22}(t)=\begin{cases}0,0\leqslant t<\dfrac{1}{2},\\ 1,\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

$$x_{nk}(t)=\begin{cases}1,\dfrac{k-1}{n}\leqslant t\leqslant\dfrac{k}{n},\\ 0,t\in[0,1]-\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right],\end{cases}\quad k=1,2,\cdots,n.$$

证明:函数列 $x_{11}(t),x_{21}(t),x_{22}(t),x_{31}(t),x_{32}(t),x_{33}(t),\cdots,x_{n1}(t),x_{n2}(t),\cdots,x_{nn}(t),\cdots$ 在 $[0,1]$ 上 p 方收敛于零函数,但在 $[0,1]$ 上不几乎处处收敛于任何函数.

7. 在平方可和的数列空间 l^2 中,取点列

$$\begin{aligned}x_n&=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_j^{(n)},\cdots)=(x_j^{(n)})\\ &=\left(\sqrt{\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^j}\right)(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

证明:x_n 按坐标一致收敛于 $x_0=(0,0,\cdots,0,\cdots)$,但 x_n 不收敛于 x_0.

§3 完 备 性

在前一节我们看到,度量空间与实直线 $\boldsymbol{R}$ 有许多类似性质,

但在一般质量空间中,并不存在与 $\boldsymbol{R}$ 的完备性所对应的性质,这表明距离公理导不出完备性.完备性是泛函分析中的一个重要概念.本节将介绍完备性概念、常见的完备空间、完备性等价命题及度量空间的完备化.

§3.1 完备性概念

先回忆一下 $\boldsymbol{R}$ 中基本列的定义.设 $\{x_n\}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中点列,若对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $n,m>N$ 时,恒有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$ 成立,则称 $\{x_n\}$ 为基本列.类似可定义度量空间中的基本列.

定义 3.1 设 (X,d) 是度量空间,$\{x_n\}$ 是 X 中点列,若对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}$,当 $n,m>N$ 时,恒有 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ 成立,则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的**基本列或柯西(Cauchy)列**.若 X 中的每个基本列都在 X 中收敛,则称 X 为**完备的度量空间**.

定理 3.1 设 (X,d) 是度量空间,则有

(1) 收敛列是基本列;

(2) 基本列是有界的;

(3) 若基本列含有一个收敛子列,则该基本列收敛,其极限即该子列之极限.

证 (1) 设 x_n、$x\in X$,且 $x_n\to x$.则对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,$d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$,从而 $n,m>N$ 时,

$$d(x_n,x_m)\leqslant d(x_n,x)+d(x,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2) 留作习题.

(3) 设 $\{x_n\}$ 是 X 中基本列,且 $\{x_{n_i}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的收敛子列,$x_{n_i}\to x(i\to\infty)$.于是,对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N_1\in\mathbf{N}$,当 $m,n>N_1$ 时,

$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$；$\exists N_2\in\boldsymbol{N}$，当 $i>N_2$ 时，$d(x_{n_i},x)<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N,i>N$ 时，$n_i\geqslant i>N$，从而有

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_n,x_{n_i})+d(x_{n_i},x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故 $x_n\to x\ (n\to\infty)$.

例 3.1 设 $X=\boldsymbol{Q}$，定义 $\boldsymbol{Q}$ 上的距离为欧氏距离，即 $\forall x_1,x_2\in\boldsymbol{Q}$，$d_u(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$，$(\boldsymbol{Q},d_u)$ 成为度量空间. 我们知道 $\boldsymbol{Q}$ 是不完备的，因 $\boldsymbol{Q}$ 中基本列 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 中不收敛. 令

$$A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4,x\in\boldsymbol{Q}\},$$

则 A 是 $(\boldsymbol{Q},d_u)$ 中闭集. 事实上，对 $\forall x_0\in\boldsymbol{Q}\setminus A$，则 $x_0<0$ 或 $x_0>4$. 不妨设 $x_0<0$，则 $\exists\delta>0$，使 $x_0+\delta<0$，于是，

$$B(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,x\in\boldsymbol{Q}\}\subset\boldsymbol{Q}\setminus A,$$

即 x_0 是 $\boldsymbol{Q}\setminus A$ 的内点，当 $x_0>4$ 时类似可证 x_0 是 $\boldsymbol{Q}\setminus A$ 的内点，故 $\boldsymbol{Q}\setminus A$ 是开集，从而 A 是 $(\boldsymbol{Q},d_u)$ 中闭集. A 中基本列 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 不收敛，故 A 作为子空间也是不完备的.

例 3.2 设 $X=(0,1]$，定义 X 上的距离为欧氏距离. 易知 $x_n=\frac{1}{n}$ 是 X 中基本列，因在 $\boldsymbol{R}$ 中，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\notin X$，故数列 $x_n=\frac{1}{n}$ 在 X 中不收敛，X 作为 $\boldsymbol{R}$ 的子空间不完备.

当一个度量空间完备时，我们有如下定理.

定理 3.2 设 (X,d) 是完备度量空间，则 X 中非空子集 F 作为子空间是完备的充要条件是 F 是 X 中闭集.

证 必要性 由定理 2.4，只需证 $F'\subset F$. 当 $F'=\varnothing$ 时，

$F' \subset F$.设 $F' \neq \varnothing$,对 $\forall x_0 \in F'$,由定理 2.2,存在 F 中点列 $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0)$,$x_n \to x_0$,由定理3.1$\{x_n\}$是 X 中基本列,也是 F 中基本列,由 F 完备知 $x_n \to y \in F$,再由极限的惟一性知 $x_0 = y \in F$,从而 $F' \subset F$,F 是闭集.

充分性　设$\{x_n\}$是 F 中基本列,由于 X 完备,$\{x_n\}$在 X 中收敛,设$\{x_n\}$收敛于 $x_0 \in X$,由 F 是闭集及推论2.2 知 $x_0 \in F$,故 F 作为子空间是完备的.

推论3.1　设(X,d)是度量空间,F 是 X 的完备子空间,则 F 是 X 中闭集.

在例3.1中,由于 $\boldsymbol{Q}$ 不完备,我们看到它的闭子集 $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, x \in \boldsymbol{Q}\}$ 作为子空间不完备.在例3.2中,虽然 $\boldsymbol{R}$ 是完备的,但 $X = (0,1]$ 不是 $\boldsymbol{R}$ 的闭子集,故它作为子空间不完备.

§3.2　常见的完备空间

由第一章定理2.8,欧氏空间 $\boldsymbol{R}$ 是完备的.

例3.3　$(\boldsymbol{R}^n, d_p)$ 是完备的$(p \geqslant 1)$.

证　以 $n = 2$ 为例证之.设 $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ $(n = 1,2,\cdots)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中基本列.由

$$d_p^p(x_n, x_m) = |x_1^{(n)} - x_1^{(m)}|^p + |x_2^{(n)} - x_2^{(m)}|^p \to 0 \ (n, m \to \infty)$$

知$\{x_1^{(n)}\}$,$\{x_2^{(n)}\}$是 $\boldsymbol{R}$ 中基本列,由 $\boldsymbol{R}$ 的完备性,存在 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \in \boldsymbol{R}$,使

$x_1^{(n)} \to x_1^{(0)}, x_2^{(n)} \to x_2^{(0)}$ $(n \to \infty)$.令 $x = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in \boldsymbol{R}^2$.由

$$d_p^p(x_n, x) = |x_1^{(n)} - x_1^{(0)}|^p + |x_2^{(n)} - x_2^{(0)}|^p \to 0 (n \to \infty)$$

知 $x_n \to x$,故$(\boldsymbol{R}^2, d_p)$ $(p \geqslant 1)$ 是完备的.

类似可证$(\boldsymbol{C}, d_2)$是完备的.

例3.4　连续函数空间$(C[a,b], d_\infty)$是完备的,其中

$$d_\infty(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\ (\forall x(t)、y(t)\in C[a,b]).$$

证 设 $x_n = x_n(t)$ 是 $C[a,b]$ 中基本列，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\boldsymbol{N}$，当 $n,m>N$ 时，有

$$d_\infty(x_n,x_m) = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

从而有

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon\ (\forall t\in[a,b],n,m>N).$$

对固定的 t，上式表明数列 $\{x_n(t)\}$ 是 $\boldsymbol{R}$(或 $\boldsymbol{C}$) 中基本列，由 $\boldsymbol{R}$(或 $\boldsymbol{C}$) 的完备性，它收敛，其极限与 t 有关，记作 $x(t)$，这样就得到一个定义在 $[a,b]$ 上的实(或复)值函数 $x(t)$，$\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛于 $x(t)$. 在

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon\quad(\forall t\in[a,b],m,n>N)$$

中，令 $m\to\infty$ 得

$$|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon\ (\forall t\in[a,b],n>N),$$

这表明 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$. 由第一章定理2.18知 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 即 $x=x(t)\in C[a,b]$，从而 $(C[a,b],d_\infty)$ 是完备的.

例 3.5 有界数列空间 l^∞ 是完备的.

证 设 $x_n=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_j^{(n)},\cdots)$ 是 l^∞ 中基本列 $(n=1,2,\cdots)$，其中 $x_j^{(n)}\in\boldsymbol{R}$(或 $\boldsymbol{C}$)，故 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\boldsymbol{N}$，当 $n、m>N$ 时，

$$d(x_n,x_m)=\sup_{j\geqslant1}|x_j^{(n)}-x_j^{(m)}|<\varepsilon. \tag{2.16}$$

从而

$$|x_j^{(n)}-x_j^{(m)}|<\varepsilon.\ (n,m>N,j=1,2,\cdots)$$

这表明对任意固定的 j，$x_j^{(1)},x_j^{(2)},\cdots,x_j^{(n)},\cdots$ 是 $\boldsymbol{R}$(或 $\boldsymbol{C}$) 中基本列，由 $\boldsymbol{R}$(或 $\boldsymbol{C}$) 的完备性，知其收敛，其极限记为 $x_j^{(0)}$ $(j=1,$

2,⋯),于是得一数列

$$x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_j^{(0)},\cdots,$$

令

$$x_0 = (x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_j^{(0)},\cdots),$$

在(2.16)式中令 $m \to \infty$ 得

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(0)}| \leqslant \varepsilon \ (n > N, j = 1,2,\cdots),$$

故

$$d(x_n,x_0) = \sup_{j\geqslant 1}|x_j^{(n)} - x_j^{(0)}| \leqslant \varepsilon(n > N),$$

从而 $d(x_n,x_0) \to 0\ (n \to \infty)$. 余下证明 $x_0 \in l^\infty$. 事实上,因

$$x_{N+1} = (x_1^{(N+1)},x_2^{(N+1)},\cdots,x_j^{(N+1)},\cdots) \in l^\infty,$$

故 $\exists M > 0$,使

$$\sup_{j\geqslant 1}|x_j^{(N+1)}| \leqslant M.$$

而

$$\sup_{j\geqslant 1}|x_j^{(0)}| \leqslant \sup_{j\geqslant 1}|x_j^{(0)} - x_j^{(N+1)}| + \sup_{j\geqslant 1}|x_j^{(N+1)}| \leqslant \varepsilon + M,$$

故

$$x_0 = (x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_j^{(0)},\cdots).$$

是有界数列,$x_0 \in l^\infty$.

例 3.6 p 次幂可和数列空间 $l^p(p \geqslant 1)$ 是完备的.

证 设 $x_n = (x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_j^{(n)},\cdots)$是 l^p 中基本列,其中 $x_j^{(n)} \in \boldsymbol{R}$(或 $\boldsymbol{C}$),故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \boldsymbol{N}$,当 $n,m > N$ 时,

$$d_p(x_n,x_m) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \qquad (2.17)$$

从而对任意 $j \geqslant 1$, $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| < \varepsilon$,这表明 $x_j^{(1)},x_j^{(2)},\cdots,x_j^{(m)},\cdots$ 是 $\boldsymbol{R}$(或 $\boldsymbol{C}$) 中基本列,由 $\boldsymbol{R}$(或 $\boldsymbol{C}$) 的完备性知其收敛,它的极限记为 $x_j^{(0)}(j = 1,2,\cdots)$,令

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_j^{(0)}, \cdots),$$

由(2.17)式知对任意 k,

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \ (m, n > N),$$

令 $m \to \infty$,得

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - x_j^{(0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \ (n > N),$$

再令 $k \to \infty$ 就得

$$d_p(x_n, x_0) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j^{(0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \ (n > N),$$

这表明 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$. 余下证明 $x_0 \in l^p$. 由 $x_{N+1} \in l^p$, 记 $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(N+1)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = C$,由闵可夫斯基不等式

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(0)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} (|(x_j^{(0)} - x_j^{(N+1)}) + x_j^{(N+1)}|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(0)} - x_j^{(N+1)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(N+1)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= d_p(x_0, x_{N+1}) + C \leqslant \varepsilon + C,\end{aligned}$$

于是级数 $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(0)}|^p$ 收敛,$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_j^{(0)}, \cdots) \in l^p$.

例 3.7 p 次幂可积函数空间 $L^p[a,b]$ $(p \geqslant 1)$ 是完备的. 证明略.

§3.3 完备性等价命题 度量空间的完备化

设 $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}$ 是一列闭球,如果满足条件:

(1) $\overline{B}(x_1, r_1) \supset \overline{B}(x_2, r_2) \supset \cdots \supset \overline{B}(x_n, r_n) \supset \cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$,

则称$\{\overline{B}(x_n,r_n)\}$是**闭球套**.

定理 3.3 设(X,d)为度量空间,则X是完备的充要条件是:对X中任意闭球套$\{\overline{B}(x_n,r_n)\}$,存在惟一的$x_0 \in X$,使得$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}(x_n,r_n)$.

证 必要性 考虑球心所成点列$\{x_n\}$,对$\forall\, m \geqslant 1$,当$n > m$时,$\overline{B}(x_n,r_n) \subset \overline{B}(x_m,r_m)$,故$x_n \in \overline{B}(x_m,r_m)$,于是

$$d(x_n,x_m) \leqslant r_m \to 0 \ (n,m \to \infty). \tag{2.18}$$

从而$\{x_n\}$是X中基本列.由X完备知$\{x_n\}$在X中收敛,设$x_n \to x_0 \in X$.由于d是连续函数,在(2.18)式中令$n \to \infty$,得

$$d(x_0,x_m) \leqslant r_m,$$

即
$$x_0 \in \overline{B}(x_m,r_m)\ (m = 1,2,\cdots),$$

从而
$$x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{B}(x_m,r_m).$$

若有一点$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}(x_n,r_n)$,则$y \in \overline{B}(x_n,r_n)\ (n = 1,2,\cdots)$,于是

$$d(y,x_n) \leqslant r_n \to 0\ (n \to \infty).$$

即$x_n \to y(n \to \infty)$,由极限的惟一性有$y = x_0$.

充分性 设$\{x_n\}$是X中任一基本列.由于$\{x_n\}$是基本列,故存在$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$,当$m,n \geqslant n_k$时,

$$d(x_n,x_m) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

在X中作闭球列:$\overline{B}\left(x_{n_k},\frac{1}{2^k}\right)\ (k = 1,2,\cdots)$,当$y \in \overline{B}\left(x_{n_{k+1}},\frac{1}{2^{k+1}}\right)$时,由于

$$d(x_{n_k},y) \leqslant d(x_{n_k},x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}},y)$$

$$< \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k},$$

故 $y \in \overline{B}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right)$，即有

$$\overline{B}\left(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}\right) \subset \overline{B}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right) \ (k = 1,2,\cdots),$$

而且 $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$，因而 $\left\{\overline{B}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right)\right\}$ 是闭球套. 由条件知

$$\exists\, x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right),$$

于是
$$d(x_{n_k}, x_0) \leqslant \frac{1}{2^k} \to 0 \ (k \to \infty),$$

这表明 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x_0，由定理 3.1 知 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$，故 X 是完备的.

在第一章中，我们已经看到，由于实数系具有完备性，因此它具有很好的性质及广泛的应用. 而有理数系 $\boldsymbol{Q}$ 不完备，在应用上就会造成很多困难，比如方程 $x^2 = 2$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 内无解，某些基本列在 $\boldsymbol{Q}$ 内不收敛等等. 将 $\boldsymbol{Q}$ 扩充成 $\boldsymbol{R}$ 使之完备化后，我们应用起来就方便多了. 因此，我们设想，是否能在不完备的空间中补充一些新的“点”使之成为完备的度量空间呢？这就是度量空间的完备化问题.

定义 3.2 设 (X,d)，(Y,ρ) 为度量空间，如果存在一个满射 $f: X \to Y$，使对任意 $x, y \in X$，有

$$d(x,y) = \rho(f(x), f(y)),$$

则称 f 是 X 到 Y 的**等距映射**或**保距映射**，并称 (X,d) 与 (Y,ρ) 是**等距同构**的.

定理 3.4 若 (X,d) 与 (Y,ρ) 等距同构，则

(1) (X,d) 与 (Y,ρ) 拓扑同胚；

(2) (Y,ρ) 完备的充要条件是 (X,d) 完备.

证 (1) 设 f 是 X 到 Y 的等距映射，由连续映射的定义，显然 f 是 X 到 Y 的连续映射. 当 $x \neq y$ 时，若 $f(x) = f(y)$，则有

$$d(x,y) = \rho(f(x),f(y)) = 0.$$

由此得 $x = y$，矛盾，从而 $f(x) \neq f(y)$，于是 f 是单射，而等距同构映射为满射，故 f 是双射，其逆映射 f^{-1} 存在，不难验证 f^{-1} 是 Y 到 X 的等距映射，故 f^{-1} 连续，于是 (X,d) 与 (Y,ρ) 拓扑同胚.

(2) 设 (X,d) 是完备的，下证 (Y,ρ) 也完备. 设 $\{y_n\}$ 是 Y 中基本列，令 $x_n = f^{-1}(y_n)$，则 $y_n = f(x_n)$. 由

$$d(x_n,x_m) = \rho(f(x_n),f(x_m)) = \rho(y_n,y_m)$$

可知 $\{x_n\}$ 是 X 中基本列，由 X 完备知 $\{x_n\}$ 收敛，设 $x_n \to x_0 \in X$，由 f 连续得

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \in Y,$$

故 $\{y_n\}$ 收敛于 Y 中一点，所以 Y 是完备的.

当 (Y,ρ) 完备时，同理可证 (X,d) 也完备.

定理 3.5 (完备化定理) 设 (X,d) 是度量空间，那么一定存在一完备度量空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$，使 (X,d) 与 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 的某个稠密子空间 $(W,\tilde{d})$ 等距同构，并且 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 在等距同构意义下是惟一的，即若 $(\hat{X},\hat{d})$ 也是一完备度量空间，且 (X,d) 与 $(\hat{X},\hat{d})$ 的某个稠密子空间等距同构，则 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 与 $(\hat{X},\hat{d})$ 等距同构.

其中稠密概念，可参见定义 5.1.

如果我们将两个等距同构的空间不加区别，视为同一的，则完备化定理可改述为：

定理 3.6 对每一个度量空间 (X,d)，都存在着惟一的完备度量空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$，使 X 成为 $\tilde{X}$ 的稠密子空间.

完备化定理的证明较复杂，这里从略.

习　题　2.3

1. 证明度量空间中的基本列是有界的.

2. 设集合 X 上定义了两种距离 d_1, d_2,若存在常数 c_1、$c_2>0$,使对任意 $x, y \in X$,有

$$c_1 d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant c_2 d_1(x, y)$$

则称距离 d_1 与 d_2 是等价的. 设 d_1、d_2 等价,证明:在度量空间 (X, d_1) 与 (X, d_2) 中,基本列是共同的;收敛点列也是共同的.

3. 设 $\boldsymbol{Z}^+$ 是正整数所成集合,令

$$d(m, n)=|m-n| \quad (\forall m, n \in \boldsymbol{Z}^+),$$

证明 $(\boldsymbol{Z}^+, d)$ 是完备度量空间.

4. 设 $\boldsymbol{Z}^+$ 是正整数所成集合,令

$$d(m, n)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right| \quad (\forall m, n \in \boldsymbol{Z}^+),$$

证明 $(\boldsymbol{Z}^+, d)$ 是不完备度量空间.

5. 证明任何离散度量空间是完备的.

6. 用 c 表示收敛实数列所成集合,证明 c 作为 l^∞ 的子空间是完备的.

7. 令 s 为一切实数列 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 所成集合,在 s 中定义距离为 $d(x, y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$ $(\forall x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots), y=(y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots) \in s)$,证明 (s, d) 是完备度量空间.

8. 设 (X, d) 是度量空间, $\{F_n\}$ 是 X 中一列非空闭集,若满足条件:

(1) $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$,

(2) $\operatorname{dia} F_n=D_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$,

则称 $\{F_n\}$ 是一个闭集套. 证明:

(X, d) 是完备度量空间的充要条件是对 X 中任意闭集套,存在惟一的 $x_0 \in X$,使得 $x_0=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$

§4 列紧性与紧性

在第一章中我们曾介绍了与实数系 $\boldsymbol{R}$ 的完备性等价的一系列命题,如列紧性定理、有限覆盖定理等.本节将在一般的度量空间中讨论这些命题.

§4.1 紧性

在实直线中,有限闭区间$[a,b]$具有重要的性质,如$[a,b]$上的连续函数有界并达到其上(下)确界;$[a,b]$上的连续函数必是一致连续的;$[a,b]$的每个开覆盖都有有限子覆盖等等.在这些性质中,有限覆盖定理是反映$[a,b]$性质的最基本的定理,因为连续函数在$[a,b]$上的有界性、一致连续性等,都可用有限覆盖定理来证明.将这种"有限覆盖性"移到度量空间中,便引出了下面要介绍的"紧性".

定义4.1 设(X,d)是度量空间,$A\subset X$,$\mathscr{W}=\{G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda$,$\Lambda$ 为指标集,G_λ 是X中开集$\}$,若 $A\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$,则称$\mathscr{W}$是 A 的一个**开覆盖**.若$\mathscr{W}$是有限集,便称$\mathscr{W}$为**有限覆盖**.设$\mathscr{V}\subset\mathscr{W}$,且$\mathscr{V}$也是 A 的一个覆盖,则称$\mathscr{V}$是$\mathscr{W}$的**子覆盖**.当$\mathscr{V}$的元只有有限个时,称$\mathscr{V}$为**有限子覆盖**.

对定义4.1读者可参照第一章定义2.2及例2.2来帮助理解.显然,$\mathscr{W}=\{G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda, G_\lambda$ 是X中开集$\}$是 A 的开覆盖,当且仅当对 $\forall x\in A$,$\exists\lambda\in\Lambda$,使 $x\in G_\lambda$.

定义 4.2 设(X,d)是度量空间,$A\subset X$,如果 A 的任意开覆盖都有有限子覆盖,则称 A 为**紧集**;若 X 本身是紧集,则称 X 为**紧空间**.

例 4.1 度量空间中任何有限子集是紧集.

例 4.2 设 X 是一个无限集，d_0 是离散距离，我们知道离散度量空间 (X,d_0) 是完备的（见习题 2.3 第 5 题），下面说明 (X,d_0) 不是紧空间. 事实上，在离散度量空间中，对 $\forall x \in X$，$B\left(x,\frac{1}{2}\right) = \{x\}$ 是开集，

$$\mathscr{W} = \left\{B\left(x,\frac{1}{2}\right) \middle| x \in X\right\} = \{\{x\} \mid x \in X\}$$

是 X 的一个开覆盖，它显然没有有限子覆盖. 同样，对 X 中任意无限子集 A，作为子空间 A 是完备的，而且 A 是有界闭集（$\mathrm{dia}A = 1$），但 A 不是紧集.

定理 4.1 设 (X,d) 是度量空间，则有

(1) X 中有限个紧集的并是紧集；

(2) 设 K 是紧集，F 是闭集且 $F \subset K$，则 F 是紧集，即紧集的闭子集是紧集；

(3) 紧集是有界集；

(4) 紧集作为 X 的子空间是完备的，从而是闭集.

证 (1) 留作练习.

(2) 设 $\mathscr{W} = \{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 F 的任一开覆盖，由于 F 是闭集，从而 F^C 是开集.

$$X = F \cup F^C \subset (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda) \cup F^C,$$

即 $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda) \cup F^C$ 是 X 的开覆盖，当然也是 K 的开覆盖. 由于 K 是紧集，故对上述开覆盖有有限子覆盖，可记为 $\{G_{\lambda_1},\cdots,G_{\lambda_n},F^C\}$，此子覆盖也是 F 的覆盖，由 $F \cap F^C = \varnothing$，故 $\{G_{\lambda_1},\cdots,G_{\lambda_n}\}$ 是 F 的覆盖，它就是 $\mathscr{W}$ 的一个有限子覆盖，于是 F 是紧集.

(3) 设 K 是 X 中紧集，取定 $x_0 \in K$，考虑开球 $B(x_0,n)$ $(n = 1,2,\cdots)$，对 $\forall x \in K$，必 $\exists n \in \mathbf{N}$，使 $n > d(x,x_0)$，故 $x \in$

$B(x_0,n)$，于是

$$K\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B(x_0,n),$$

即 $\mathscr{W}=\{B(x_0,n)\mid n=1,2,\cdots\}$ 是 K 的一个开覆盖，由 K 是紧集知 $\mathscr{W}$ 有有限子覆盖，记为

$$\mathscr{V}=\{B(x_0,n_1),B(x_0,n_2),\cdots,B(x_0,n_m)\},$$

不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_m$，则 $K\subset B(x_0,n_m)$，即 $\mathrm{dia}K\leqslant 2n_m$，故 K 有界.

(4) 设 F 是 X 中紧集，

$\overline{B}_F(x_n,r_n)=\{x\mid d(x,x_n)\leqslant r_n,x_n,x\in F\}\ (n=1,2,\cdots)$

是 F 中任一闭球套. 记

$\overline{B}_X(x_n,r_n)=\{x\mid d(x,x_n)\leqslant r_n,x\in X\}\ (n=1,2,\cdots)$，

它们是 X 中的一列闭球，显然

$$\overline{B}_F(x_n,r_n)=\overline{B}_X(x_n,r_n)\cap F.$$

下面证明

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}_F(x_n,r_n)\neq\varnothing.$$

若不然，假设

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}_F(x_n,r_n)=\varnothing,$$

等式两边在 X 中取余集得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[\overline{B}_F(x_n,r_n)]^C=X$$

但

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty}[\overline{B}_F(x_n,r_n)]^C&=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\overline{B}_X(x_n,r_n)\cap F]^C\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{[\overline{B}_X(x_n,r_n)]^C\cup F^C\}\\&=\{\bigcup_{n=1}^{\infty}[\overline{B}_X(x_n,r_n)]^C\}\cup F^C,\end{aligned}$$

故 $$F \subset X = \{\bigcup_{n=1}^{\infty}[\overline{B}_X(x_n, r_n)]^C\} \cup F^C,$$

亦即 $$F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}[\overline{B}_X(x_n, r_n)]^C.$$

由于 $\overline{B}_X(x_n, r_n)$ 是闭集，故 $[\overline{B}_X(x_n, r_n)]^C$ 是开集，于是 $\{[\overline{B}_X(x_n, r_n)]^C | n = 1, 2, \cdots\}$ 是 F 的开覆盖.由于 F 是紧集,必存在有限子覆盖,记为

$$\{[\overline{B}_X(x_{n_1}, r_{n_1})]^C, \cdots, [\overline{B}_X(x_{n_k}, r_{n_k})]^C\},$$

又因

$$\overline{B}_F(x_n, r_n) \subset \overline{B}_X(x_n, r_n),$$

故

$$[\overline{B}_F(x_n, r_n)]^C \supset [\overline{B}_X(x_n, r_n)]^C,$$

从而

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{k}[\overline{B}_F(x_{n_i}, r_{n_i})]^C$$

不妨设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$,则由假设条件,有

$$\overline{B}_F(x_{n_1}, r_{n_1}) \supset \overline{B}_F(x_{n_2}, r_{n_2}) \supset \cdots \supset \overline{B}_F(x_{n_k}, r_{n_k}),$$

故

$$[\overline{B}_F(x_{n_1}, r_{n_1})]^C \subset [\overline{B}_F(x_{n_2}, r_{n_2})]^C \subset \cdots \subset [\overline{B}_F(x_{n_k}, r_{n_k})]^C,$$

从而

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{k}[\overline{B}_F(x_{n_i}, r_{n_i})]^C = [\overline{B}_F(x_{n_k}, r_{n_k})]^C,$$

即

$$\overline{B}_F(x_{n_k}, r_{n_k}) \subset F \subset [\overline{B}_F(x_{n_k}, r_{n_k})]^C,$$

矛盾.这样就证明了 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}_F(x_n, r_n) \neq \varnothing$,由定理 3.3 知 F 是 X 的完备子空间,再由推论 3.1 知 F 是 X 中闭集.

由定理 4.1 及例 4.2 可知,在一般度量空间中,有界性与闭性

只是紧性的必要条件.然而,在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中它们却是等价的.

例4.3 欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的立方体$M=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid -N\leqslant x_i\leqslant N, i=1,2,\cdots,n, N$ 为一正数$\}$ 是紧集.

证 我们以 $\boldsymbol{R}^2$ 中的"立方体"即正方形 $M=\{(x_1,x_2)\mid -N\leqslant x_1,x_2\leqslant N\}$ 为例证明,$\boldsymbol{R}^n$ 的情形证明相仿.设$\mathscr{W}=\{G_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是 M 的任一开覆盖,下面证明$\mathscr{W}$有有限子覆盖,采用反证法.若$\mathscr{W}$没有有限子覆盖,即 M 不能被$\mathscr{W}$中有限个开集所覆盖.将 M 分成四个面积相等的小正方形,则这四个小正方形中至少有一个不能被$\mathscr{W}$中有限个开集所覆盖,我们取这个小正方形并将之记为 M_1.将 M_1 又分成四个面积相等的小正方形,则这四个小正方形中又至少有一个不能被$\mathscr{W}$中有限个开集所覆盖,我们记这个小正方形为 M_2,再将 M_2 分成四个小正方形,如此继续下去,得到一列闭正方形$\{M_n\}$,它显然是一个闭集套,由习题 2.3 第 8 题,$\exists\, x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}M_n$,由于 $x_0\in M$,故存在$\mathscr{W}$中开集 G_{λ_0},使 $x_0\in G_{\lambda_0}$,由 G_{λ_0} 是开集,必 $\exists\,\delta>0$,使 $B(x_0,\delta)\subset G_{\lambda_0}$.对 $\forall\, x\in M_n$,$d(x,x_0)\leqslant \mathrm{dia}M_n\to 0(n\to\infty)$.于是当 n 充分大时,$d(x,x_0)<\delta$,即 $M_n\subset B(x_0,\delta)\subset G_{\lambda_0}$,但由 M_n 的构造知M_n 不能被$\mathscr{W}$中有限个开集所覆盖,现 M_n 却被$\mathscr{W}$中一个开集 G_{λ_0} 覆盖住,矛盾,于是$\mathscr{W}$有有限子覆盖,即 M 是紧集.

定理4.2 在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中,子集 A 是紧集的充要条件为:A 是有界闭集.

证 必要性 由定理4.1即得.

充分性 设 A 是$\boldsymbol{R}^n$ 中有界闭集,则 A 必含在某立方体$M=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid -N\leqslant x_i\leqslant N, i=1,2,\cdots,n, N$为一正数$\}$之中.现设$\mathscr{W}=\{G_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是 A 的任一开覆盖,由 A 是闭集,知

$\boldsymbol{R}^n \setminus A$ 是开集，且$\{\boldsymbol{R}^n \setminus A\} \cup \mathscr{W}$覆盖了 $\boldsymbol{R}^n$，当然也覆盖了 M. 由例 4.3 知 M 是紧集，故有有限子覆盖$\{\boldsymbol{R}^n \setminus A\} \cup \{G_{\lambda_i} \mid \lambda_i \in \Lambda, i = 1,2,\cdots,m\}$，而 $A \subset M$，于是$\{G_{\lambda_i} \mid \lambda_i \in \Lambda, i = 1,2,\cdots,m\}$覆盖了 A，它就是$\mathscr{W}$的有限子覆盖，从而 A 是紧集.

由定理 4.2 即知，对直线上任一有界闭集，有限覆盖定理都是适用的(参见第一章定理 2.7).

§4.2 列紧性与全有界性

由直线上的有限覆盖定理，我们引出了紧性的概念. 类似地，由直线上的列紧性定理，就导出了下面列紧性概念.

定义 4.3 设(X,d)是度量空间. $A \subset X$，如果 A 中的任何点列$\{x_n\}$，都存在收敛子列$\{x_{n_i}\}$ $(x_{n_i} \to x \in X)$，则称 A 为**列紧集**. 如果 X 本身是列紧集，则称 X 为**列紧空间**.

例 4.4 在实直线 $\boldsymbol{R}$ 中，$A = (0,1)$是列紧集. 因 A 中任意数列是有界的，由列紧性定理(第一章定理 2.6) 知其有收敛的子列，故开区间$(0,1)$是列紧集. $B = [0, +\infty)$不是列紧集，因 B 中数列 $x_n = n$ $(n = 1,2,\cdots)$ 显然没有收敛子列.

在列紧集的定义中，并没有要求 A 中点列的收敛子列的极限也属于A. 如果 A 是闭集，则收敛子列的极限也属于 A. 我们称列紧闭集为**自列紧集**. 显然，A 为自列紧集的充要条件是A 中的任何点列必含有收敛于 A 中某点的子列. 而对全空间而言，列紧与自列紧是一回事.

定理 4.3 设(X,d)是度量空间.

(1) X 中任何有限点集是列紧集；

(2) 列紧集的子集是列紧集，因而任意多个列紧集的交是列紧集；

(3) X 中有限个列紧集的并是列紧集;

(4) $A \subset X$ 是列紧集的充要条件为 $\overline{A}$ 是自列紧集;

(5) 如果 X 是列紧空间,则它是完备的. 因而自列紧集 A 作为子空间是完备的.

证 (1),(2),(3) 显然,只证(4),(5).

(4) 充分性 设 $\overline{A}$ 是自列紧集,由 $A \subset \overline{A}$ 及(2) 知 A 是列紧集.

必要性 设 $\{x_n\}$ 是 $\overline{A}$ 中点列,由定理2.3(2) 知,对每个 $n \geqslant 1$, $\exists\, y_n \in A$,使 $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$,因 A 是列紧集,故 A 中点列 $\{y_n\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_k}\}$,设 $y_{n_k} \to y \in X$,因而

$$\begin{aligned} d(x_{n_k}, y) &\leqslant d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y) \\ &< \frac{1}{n_k} + d(y_{n_k}, y) \to 0 \ (k \to \infty), \end{aligned}$$

即 $x_{n_k} \to y\ (k \to \infty)$. 由 $d(y_{n_k}, y) \to 0$ 及定理 2.3 知 $y \in \overline{A}$,也就是 $\overline{A}$ 中的点列 $\{x_n\}$ 含有收敛于 $\overline{A}$ 中点 y 的子列 $\{x_{n_k}\}$,故 $\overline{A}$ 是自列紧集.

(5) 设 $\{x_n\}$ 是 X 中基本列. 由于 X 是列紧空间,故存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x \in X$. 由定理 3.1 知 $x_n \to x (n \to \infty)$,故 X 是完备的.

读者应注意,列紧集作为子空间不一定完备;完备的子空间不一定是列紧集. 如例 4.4 中的开区间(0,1) 是列紧集,它不完备;而 $[0, +\infty)$ 是完备的,但不是列紧集.

定义 4.4 设 (X, d) 是度量空间, $A \subset X$, $B \subset X$,如果对 $\forall\, \varepsilon > 0$, A 被以 B 中各点为心, ε 为半径的开球全体所覆盖,即

$$A \subset \bigcup_{x \in B} B(x, \varepsilon)$$

则称 B 是A 的一个**ε- 网**,如果对 $\forall\varepsilon>0$,总存在着 A 的有限ε- 网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,则称 A 为**全有界集**.

例如,在实直线 $\boldsymbol{R}$ 中,$A=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的$\dfrac{2}{3}$- 网.

例 4.5 设 A 是度量空间中紧集,则 A 是全有界集.

证 对 $\forall\varepsilon>0$,则 $A\subset\bigcup\limits_{x\in A}B(x,\varepsilon)$,即$\mathscr{W}=\{B(x,\varepsilon)\mid x\in A\}$ 是 A 的开覆盖,由 A 是紧集知$\mathscr{W}$有有限子覆盖,记为

$$\{B(x_1,\varepsilon),\cdots,B(x_n,\varepsilon)\},$$

即

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\varepsilon),$$

故$\{x_1,\cdots,x_n\}$是 A 的有限ε- 网,由定义知 A 是全有界集.

定理 4.4 度量空间中的全有界集必是有界集.

证 设 A 是全有界集,则对 $\varepsilon=1$,存在有限1- 网,记为$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,于是对 $\forall x\in A$,$\exists k$,$1\leqslant k\leqslant n$,使 $d(x,x_k)<1$,记

$$M=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{d(x_i,x_j)\}.$$

对 $\forall x,y\in A$,必 $\exists i,j$,$1\leqslant i,j\leqslant n$,使

$$d(x,x_i)<1,d(y,x_j)<1,$$

于是

$$\begin{aligned}d(x,y)&\leqslant d(x,x_i)+d(x_i,y)\\&\leqslant d(x,x_i)+d(x_i,x_j)+d(x_j,y)\\&<1+M+1=2+M,\end{aligned}$$

从而 $\mathrm{dia}A\leqslant2+M$,即 A 有界.

例 4.6 设(X,d_0)是离散度量空间,且 X 是无限集.易知 $\mathrm{dia}X=1$,X 是有界集.下面说明 X 不是全有界集,事实上,若 X

是全有界集,则对 $\varepsilon=\frac{1}{2}$,X 有有限$\frac{1}{2}$-网$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.即

$$X\subset B\left(x_1,\frac{1}{2}\right)\cup B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)\cup\cdots\cup B\left(x_n,\frac{1}{2}\right)$$
$$=\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup\cdots\cup\{x_n\}$$
$$=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

这与 X 是无限集相矛盾,故 X 不是全有界集.

定理 4.5 (豪斯道夫(Hausdorff)定理) 设(X,d)是度量空间.

(1) 若 A 是X 中列紧集,则 A 是全有界集;

(2) 当 X 完备时,X 中子集A 为列紧集的充要条件是A 为全有界集.

证 (1) 采用反证法.设 A 是列紧集,A 不是全有界集,则必 $\exists\,\varepsilon_0>0$,A 没有有限ε_0-网.任取 $x_1\in A$,因 A 不能含于$B(x_1,\varepsilon_0)$,故

$$\exists\,x_2\in A\setminus B(x_1,\varepsilon_0),$$

因而$d(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$.同样,由于 A 不能含于$B(x_1,\varepsilon_0)\cup B(x_2,\varepsilon_0)$,必

$$\exists\,x_3\in A\setminus[B(x_1,\varepsilon_0)\cup B(x_2,\varepsilon_0)],$$

即
$$d(x_3,x_1)\geqslant\varepsilon_0,d(x_3,x_2)\geqslant\varepsilon_0.$$

如此继续下去,得到 A 中点列$\{x_n\}$,满足

$$d(x_i,x_j)\geqslant\varepsilon_0\quad(i\neq j).$$

它的任何子列都不是基本列,故它的任何子列都不收敛,这与 A 是列紧集相矛盾,故 A 是全有界集.

(2) 必要性已由(1)证明.下证充分性.设(X,d)完备,且 $A\subset X$ 是全有界的.只需证明 A 中任一点列$\{x_n\}$,一定有一子列

$\{x_{n_k}\}$ 是基本列，由 X 完备知 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，所以 A 是列紧集. 下面来证 $\{x_n\}$ 中必有一子列是基本列. 因 A 全有界，取

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k} \ (k = 1,2,\cdots),$$

A 有有限 $\frac{1}{k}$- 网 A_k. 由定义，以 A_1 中各点为中心，$\varepsilon_1 = 1$ 为半径的有限个开球覆盖了 A，从而覆盖了点列 $\{x_n\}$，因此至少有一个开球含有 $\{x_n\}$ 的一个子列，记作 $\{x_n^{(1)}\}$. 同样，以 A_2 中各点为中心，$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ 为半径的有限个开球覆盖了 $\{x_n^{(1)}\}$，因此至少有一个开球含有 $\{x_n^{(1)}\}$ 的一个子列，记作 $\{x_n^{(2)}\}$，按此法可得一列点列：

$$\begin{array}{c} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}, \cdots \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

这些点列中的每一个都是前面一个的子列，并且第 k 个子列包含在半径为 $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ 的开球中. 取上表对角线点列作新点列 $\{x_k^{(k)}\}$ $(k = 1,2,\cdots)$，它显然是 $\{x_n\}$ 的一个子列，且当 $m > k$ 时，$x_m^{(m)}, x_k^{(k)}$ 同含于半径为 $\frac{1}{k}$ 的开球中，故

$$d(x_k^{(k)}, x_m^{(m)}) < \frac{2}{k} \ (m > k),$$

由此式即知 $\{x_k^{(k)}\}$ 是一个基本列.

推论 4.1 在度量空间 (X,d) 中，A 是自列紧集的充要条件是：A 是全有界集，且 A 作为子空间是完备的.

下面给出了一个不完备空间中的全有界集但不是列紧集的例

子.

例4.7 在实直线 $\boldsymbol{R}$ 中,闭区间$[0,1]$是紧集,由例4.5知,对 $\forall \varepsilon>0$,$[0,1]$有有限$\frac{\varepsilon}{2}$-网$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.在$[0,1]$中取有理数$r_1,\cdots,r_n$,使$|r_i-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}$,则$\{r_1,\cdots,r_n\}$是$[0,1]$的$\varepsilon$-网.事实上,对 $\forall x\in[0,1]$,必存在 $i\ (1\leqslant i\leqslant n)$,使$|x-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}$,此时

$$\begin{aligned}|x-r_i| &\leqslant |x-x_i|+|x_i-r_i|\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故$\{r_1,\cdots,r_n\}$是$[0,1]$的ε-网,它当然是$A=[0,1]\cap\boldsymbol{Q}$的$\varepsilon$-网,而且

$$\{r_1,\cdots,r_n\}\subset A=[0,1]\cap\boldsymbol{Q}.$$

现考虑不完备度量空间$(\boldsymbol{Q},d_u)$,其中,d_u 是欧氏距离:

$$d_u(x,y)=|x-y|.$$

$A=[0,1]\cap\boldsymbol{Q}$是$\boldsymbol{Q}$中子集,因对 $\forall\varepsilon>0$,A有有限ε-网$\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$,故 A 是$\boldsymbol{Q}$ 中全有界集,但 A 中数列

$$x_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ (n=1,2,\cdots)$$

在 $\boldsymbol{Q}$ 中无收敛的子列$\left(因\ x_n\to\frac{e}{4}\notin\boldsymbol{Q}\right)$,故 A 不是列紧集.

定理4.6 设(X,d)为度量空间,$A\subset X$,则 A 是自列紧集的充要条件是A 为紧集.

证 下面只证充分性,必要性的证明略去.

充分性 设 A 是紧集,由例 4.5 知 A 是全有界集,由定理 4.1,A 是完备的,再由推论 4.1 知 A 是自列紧集.

由定理 4.2 及定理 4.6 直接可得如下推论.

推论 4.2 欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中子集 A 为列紧集的充要条件是 A 为有界集.

下面介绍两个具体空间中集合列紧性的判别定理(有关证明从略)

定理 4.7(阿尔采拉-阿斯可利(Arzela-Ascoli)定理) 集合 $A \subset C[a,b]$ 是列紧集的充要条件是下列两个条件均成立:

(1) A 是一致有界的,即存在常数 k,使对一切 $x(t) \in A$,均有

$$|x(t)| \leqslant k \ (\forall t \in [a,b]);$$

(2) A 是等度连续的,即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$,使对

$$\forall x(t) \in A, \forall t_1, t_2 \in [a,b],$$

只要 $|t_1 - t_2| < \delta$,就有

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

定理 4.8 在 $l^p(p \geqslant 1)$ 中,子集 A 是列紧集的充要条件是:

(1) A 是 (l^p, d_p) 中有界集;

(2) 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$,使对

$$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in A,$$

都有

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

§4.3 紧集上连续泛函的性质

正如我们前面所指出的,紧集是直线上闭区间 $[a,b]$ 的某种推广,紧集上的连续函数,即连续泛函,有类似于闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的一些性质.

定理 4.9 设 (X,d) 是度量空间,A 是 X 中紧集;$f: A \to \boldsymbol{R}$

是连续函数,则

(1) $f(x)$ 在 A 上有界;

(2) $f(x)$ 在 A 上达到上、下确界,即 $f(x)$ 在 A 上取到它的最大值与最小值.

证 (1) 用反证法证明 $f(x)$ 在 A 上有上界. 假设 $f(x)$ 在 A 上无上界,则对 $\forall n \in \mathbf{N}$,必 $\exists x_n \in A$,使

$$f(x_n) > n.$$

由于 A 是紧集即自列紧集,故对 A 中点列 $\{x_n\}$,存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$,$x_{n_k} \to x_0 \in A\ (k \to \infty)$. 因 f 在 x_0 连续,由定理 2.7 有

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0)\ (k \to \infty),$$

但另一方面,

$$f(x_{n_k}) > n_k \to \infty (k \to \infty).$$

矛盾,故 f 在 A 上有上界. 类似可证 f 在 A 上有下界,因此 f 在 A 上有界.

(2) 设 $\beta = \sup\limits_{x \in A} f(x)$,由上确界定义,当 $x \in A$ 时,$f(x) \leqslant \beta$,且对任意 $n \in \mathbf{N}$,$\exists x_n \in A$,使

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant \beta.$$

由于 A 是自列紧集,故存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$,$x_{n_k} \to x_0 \in A$ $(k \to \infty)$. 由

$$\beta - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant \beta,$$

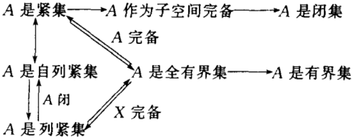
令 $k \to \infty$,利用 f 在 x_0 连续,可得 $\beta \leqslant f(x_0) \leqslant \beta$,即 $f(x_0) = \beta$. 类似地,可证 $\exists x_1 \in A$,使 $f(x_1) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$.

定理 4.10 设 (X, d) 是度量空间,A 是 X 中紧集,$f: A \to \boldsymbol{R}$ 是连续函数,则 f 在 A 上必一致连续.

证 参见第一章定理 2.17,留作练习.

最后,我们把本节有关概念之间的关系总结如下:

在度量空间 X 中,$A\subset X$



在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中,$A\subset \boldsymbol{R}^n$

$$A\text{ 有界}\rightleftarrows A\text{ 全有界}\rightleftarrows A\text{ 列紧}\xrightleftharpoons{A\text{ 闭}} A\text{ 自列紧}\rightleftarrows A\text{ 紧}$$

习 题 2.4

1. 设(X,d),(Y,ρ)是两个度量空间,A 是X 中紧集,$f:X\to Y$是连续映射,证明 $f(A)$ 是 Y 中紧集(即紧集的连续象是紧集).

2. 设 A 是度量空间中的全有界集,证明:对任意给定的 $\varepsilon>0$,可以取 A 的一个有限子集作为 A 的ε- 网.

3. 设$\{F_n\}(n=1,2,\cdots)$是紧空间中的一列闭集:

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots,$$

并且 $F_n\neq\varnothing$,证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$.

4. 设 F_n 是度量空间中紧集$(n=1,2,\cdots)$,证明:$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ 也是紧集;有限个 F_n 的并是紧集.

5. 设(X,d)是度量空间,$F_1,F_2\subset X$,定义 F_1 与 F_2 的距离为 $d(F_1,F_2)=\inf\limits_{\substack{x\in F_1\\ y\in F_2}}d(x,y)$.设 F_1,F_2 是 X 中紧集,证明:

(1) 存在 $x_0 \in F_1, y_0 \in F_2$,使 $d(F_1, F_2) = d(x_0, y_0)$;

(2) 当 $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ 时,$d(F_1, F_2) > 0$.

6. 举例说明:度量空间中的两个不相交的闭集 F_1, F_2,它们的距离 $d(F_1, F_2)$ 可能为零.若将 F_1 为闭集的条件改为 F_1 是紧集,结论如何?

7. 证明度量空间中紧集上的连续函数必一致连续.

8. 设(X,d),(Y,ρ)是两个度量空间,$f:X \to Y$ 是连续映射,A 是X 中列紧集,证明 $f(A)$ 是 Y 中列紧集.

§5 可 分 性

我们知道,有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 在实直线$\boldsymbol{R}$ 中稠密,它的重要性在于,$\boldsymbol{Q}$ 是一个可数集,$\boldsymbol{R}$ 中的每一个点,都可用 $\boldsymbol{Q}$ 中的点列去逼近.这样,有时在 $\boldsymbol{R}$ 中讨论某个问题时,可先在 $\boldsymbol{Q}$ 中讨论,然后利用稠密性推广到整个 $\boldsymbol{R}$ 上去.

定义5.1 设(X,d)中有两个子集A,B,若B中每一点的任一邻域内都含 A 的点,则称 A 在B 中**稠密**,若 $B = X$,则称 A 在 X 中**稠密**.

由定义,$\boldsymbol{Q}$ 在$\boldsymbol{R}$ 中稠密;$\boldsymbol{Q}$ 在$\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ 中也稠密.

定理5.1 设(X,d)是度量空间,$A, B \subset X$,以下陈述等价:

(1) A 在B 中稠密;

(2) $B \subset \overline{A}$;

(3) $\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$,使 $d(a,b) < \varepsilon$;

(4) $\forall b \in B$,存在 A 中点列$\{a_n\}$,使 $a_n \to b (n \to \infty)$;

(5) $\forall \varepsilon > 0$,以 A 中每点为中心,ε 为半径的全体开球覆盖 B.

证 (1)⇒(2) 对 $\forall b \in B$,若 $b \in A$,则 $b \in \overline{A}$,若 $b \notin A$,由 A 在B 中稠密定义,b 是A 的聚点,即 $b \in A'$,从而 $b \in \overline{A}$.

(2)⇒(3) 对 $\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0$,若 $b \in A$,取 $a = b$,$d(b,b) = 0 < \varepsilon$;若 $b \notin A$,由条件,$b \in A'$,由聚点定义,$B(b,\varepsilon)$ 内含 A 的点 a,即 $\exists a \in A$,使 $d(a,b) < \varepsilon$.

(3)⇒(4) 对 $\forall b \in B$,由条件(3),对 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1,2,\cdots)$,$\exists a_n \in A$,使 $d(a_n,b) < \frac{1}{n}$,由此知 $a_n \to b$ $(n \to \infty)$.

(4)⇒(5) 对 $\forall \varepsilon > 0, \forall b \in B$,由条件(4),$\exists a_n \in A$ $(n = 1,2,\cdots)$,使 $a_n \to b$ $(n \to \infty)$,故当 n 充分大时,$d(b,a_n) < \varepsilon$,于是 $b \in B(a_n,\varepsilon)$,从而 $B \subset \bigcup_{x \in A} B(x,\varepsilon)$.

(5)⇒(1) 对 $\forall b \in B$,设 G 是 b 的任一邻域,则 $\exists \varepsilon > 0$,使 $B(b,\varepsilon) \subset G$,对 $\frac{\varepsilon}{3} > 0$,由条件(5),$B \subset \bigcup_{x \in A} B\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right)$,故 $\exists a \in A$,使 $b \in B\left(a, \frac{\varepsilon}{3}\right)$,即 $d(b,a) < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$,于是 $a \in B(b,\varepsilon) \subset G$,由稠密定义知 A 在 B 中稠密.

例 5.1 在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中,令 $A = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n) \mid r_i \in \boldsymbol{Q}, i = 1,2,\cdots,n\}$,则 A 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中稠密. 事实上,$\forall \varepsilon > 0, \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$,因有理数在实数中稠密,故 $\exists r_1, r_2, \cdots, r_n \in \boldsymbol{Q}$,使 $|x_i - r_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n) \in A$,且

$$d(x,r) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - r_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon.$$

由定理 5.1 知 A 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中稠密.

例 5.2 实系数多项式的集合 $P[a,b]$ 在$(C[a,b], d_\infty)$ 中稠密(这里假定 $C[a,b]$ 为$[a,b]$ 上实值连续函数空间).

证 对 $\forall x = x(t) \in C[a,b]$,由 Weierstrass 多项式逼近定

理(第一章定理 2.20)，必存在实系数多项式序列$\{p_n(t)\}$，使$\{p_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$x(t)$，即对$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$，当$n > N$时，对$\forall t \in [a,b]$，有$|p_n(t) - x(t)| < \varepsilon$，从而

$$d_\infty(p_n, x) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |p_n(t) - x(t)| < \varepsilon,$$

上式表明存在$P[a,b]$中点列$\{p_n\}$，$p_n \to x$，由定理5.1知$P[a,b]$在$C[a,b]$中稠密.

定理5.2 设(X,d)是度量空间，A、B、$C \subset X$，且A在B中稠密，B在C中稠密，则A在C中稠密.

证 由已知条件及定理5.1知，$B \subset \overline{A}$，$C \subset \overline{B}$，从而有$C \subset \overline{B} \subset \overline{\overline{A}}$，但$\overline{A}$是闭集(习题2.2第3题)，由闭集的充要条件(定理2.5)，有$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$，故$C \subset \overline{A}$，即$A$在$C$中稠密.

例5.3 设$P_0[a,b]$是$[a,b]$上有理系数多项式全体所成集合，$P[a,b]$是$[a,b]$上实系数多项式全体所成集合，证明在距离$d_\infty(x,y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$意义下，$P_0[a,b]$在$P[a,b]$中稠密.

证 对任意给定的$x(t) \in P[a,b]$，可设$x(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i t^i$，其中$n$为固定的正整数，$c_i(i = 0,1,\cdots,n)$为已知实数.设

$$M = \max\{1, |a|, |b|\},$$

于是

$$|t^i| \leqslant M^n (i = 0,1,2,\cdots,n).$$

对$\forall \varepsilon > 0$，由$\boldsymbol{Q}$在$\boldsymbol{R}$中的稠密性，取$r_i \in \boldsymbol{Q}$ $(i = 0,1,2,\cdots,n)$，使

$$|c_i - r_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(n+1)M^n} \ (i = 0,1,2,\cdots,n),$$

作

$$x_0(t) = \sum_{i=0}^{n} r_i t^i \in P_0[a,b],$$

则当 $t \in [a,b]$ 时,有

$$\begin{aligned}|x(t) - x_0(t)| &= \left|\sum_{i=0}^{n} c_i t^i - \sum_{i=0}^{n} r_i t^i\right| \\ &= \left|\sum_{i=0}^{n}(c_i - r_i)t^i\right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n}|c_i - r_i||t|^i \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n}|c_i - r_i|M^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}d_\infty(x,x_0) &= \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t) - x_0(t)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\end{aligned}$$

由定理 5.1 知 $P_0[a,b]$ 在 $P[a,b]$ 中稠密.

例 5.4 $P_0[a,b]$ 在 $P[a,b]$ 中稠密,$P[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密,据定理 5.2,$P_0[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密.

定义 5.2 设(X,d)是度量空间,$A\subset X$,如果存在一个至多可数的集 $B\subset X$,使 B 在A 中稠密,则称 A 是**可分点集**(或**可析点集**).当 X 本身是可分点集时,称 X 是**可分空间**.

由定理 5.1 易知,有无限个元的度量空间 X 是可分的充要条件是:存在一个可数子集 $A = \{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}\subset X$,使 $\overline{A} = X$.

如前面提到的那样,当所研究的度量空间可分时,我们可从中选出一个可数的稠密子集去研究,然后利用稠密性,设法将研究的

结论推广到整个空间中去.可分的度量空间的重要性便在于此.

例 5.5 欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是可分的.因为由例 5.1 知 $A = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n) \mid r_i \in \boldsymbol{Q}, i = 1,2,\cdots,n\}$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中稠密.显然,$A = \underbrace{\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q} \times \cdots \times \boldsymbol{Q}}_{n个}$,由 $\boldsymbol{Q}$ 可数及第一章定理 1.7 知 A 是可数集,故 $\boldsymbol{R}^n$ 是可分空间.

例 5.6 $C[a,b]$ 是可分空间.

证 由例 5.4,有理系数多项式全体 $P_0[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密,只须证 $P_0[a,b]$ 是可数集即可.对任意固定的 n,记 $P_{on}[a, b] = \{x(t) \mid x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, a_i \in \boldsymbol{Q}, i = 0,1,\cdots, n\}$,显然,$P_{on}[a,b]$ 与 $\underbrace{\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q} \times \cdots \times \boldsymbol{Q}}_{n+1个}$ 对等,它是可数集,又 $P_0[a,b] = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_{on}[a,b]$ 是可数个可数集的并集,由第一章定理 1.7 即知 $P_0[a,b]$ 是可数集.

例 5.7 空间 $l^p (1 \leqslant p < +\infty)$ 是可分的.因为形如 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m, 0, 0, \cdots)$(其中 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 是有理数)的点的全体 A 是可数集,A 在 l^p 中稠密.事实上,任取 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots) \in l^p$,由于 $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p$ 收敛,故对 $\forall \varepsilon > 0$,必有 $m \in \boldsymbol{N}$,使得 $\sum_{j=m+1}^{\infty} |x_j|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$,再取有理数 $y_1, \cdots, y_m$,使 $\sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$,对于 $y = \{y_1, \cdots, y_m, 0, \cdots\} \in A$,有

$$
\begin{aligned}
d_p(x,y) &= \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j|^p + \sum_{j=m+1}^{m} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \left[\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$= 2^{\frac{1}{p}-1}\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

由定理 5.1 知 A 在 l^p 中稠密.

定理 5.3 $L^p[a,b]$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ 是可分空间.

证略.

定理 5.4 设 (X,d) 是度量空间，A 是 X 的全有界子集，则 A 是可分点集.

证 对 $\forall \varepsilon > 0$，由于 A 是全有界的，故 A 有有限 ε- 网 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 对 $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$ $(k = 1,2,\cdots)$，设 $B_k = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{n_k}^{(k)}\}$ 是 A 的 $\dfrac{1}{k}$- 网，令 $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$，则 B 为至多可数集. 现对 $\forall \delta > 0$，必存在 $k_0 \in \mathbf{N}$，使 $\dfrac{1}{k_0} < \delta$，对 $\forall x \in A$，由于 B_{k_0} 是 A 的 $\dfrac{1}{k_0}$- 网，故存在 l，$1 \leqslant l \leqslant n_{k_0}$，使 $x \in B\left(x_l^{(k_0)}, \dfrac{1}{k_0}\right)$，即 $d(x, x_l^{(k_0)}) < \dfrac{1}{k_0} < \delta$，而 $x_l^{(k_0)} \in B_{k_0} \subset B$，由定理 5.1 知 B 在 A 中稠密，因此 A 是可分点集.

推论 5.1 度量空间中的列紧集、紧集都是可分点集.

例 5.8 有界数列空间 l^∞ 是不可分的.

证 设 $A = \{x \mid x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots), x_i = 0 \text{ 或 } 1\}$，则 $A \subset l^p$. 若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) \in A$，且 $x \neq y$，则

$$d(x,y) = \sup_{i \geqslant 1} |x_i - y_i| = 1.$$

又因为 $[0,1]$ 中的数 z 都可以用二进制小数表示：

$$z = 0.z_1 z_2 \cdots z_n \cdots, \text{其中 } z_i = 0 \text{ 或 } 1,$$

所以 $[0,1]$ 可以与 A 建立一一对应关系，即 A 的势是 $\aleph$，因此 A

是不可数集.

假设 l^∞ 中存在一个可数的稠密子集 A_0，以 A_0 中每个点为中心，$\frac{1}{3}$ 为半径作开球，则 l^∞ 中的所有点都含在这些开球内. 若每个开球至多只含 A 的一个点，我们将这个点与球心对应，这样 A 对等于A_0 的一个子集，从而 A 是至多可数集，这与 A 是不可数集相矛盾. 因此存在一个开球至少含有 A 的两个点 $x, y(x \neq y)$，设此开球的中心是 x_0，则

$$1 = d(x,y) \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,y) < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

矛盾. 因此 l^∞ 中不可能存在一个可数的稠密子集，即 l^∞ 是不可分的.

我们知道 l^∞ 是完备的，但 l^∞ 不可分.

习　题　2.5

1. 设(X,d)、(Y,ρ)是度量空间，$f:X \to Y$是连续映射，A在X中稠密，证明 $f(A)$ 在 $f(X)$ 中稠密.

2. 设(X,d) 是度量空间，$A \subset X$，且 A 是可分点集，证明：存在 A 的子集A_1，A_1 至多可数，且 A_1 在 A 中稠密.

3. 设(X,d)是完备度量空间，$\{G_n\}$ $(n = 1,2,\cdots)$是 X 中一列开集，且每个 G_n 都在X 中稠密，证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$.

第三章　赋范线性空间及其上的线性算子

在上一章中，介绍了度量空间及其性质. 在度量空间中，通过"度量"引出了极限的概念，从而将高等数学中研究数量关系的极限、连续等概念推广到了度量空间. 一般来说，在度量空间中可以没有元素间的代数运算，如线性运算等. 但在数学物理等实际问题中，特别重要而且常用的空间大多是对线性运算封闭的线性空间，在其上既有代数结构又有度量(拓扑)结构，而且两者是有机地结合起来的，例如 $\boldsymbol{R}^n$，$C[a,b]$，l^p，$L^p[a,b]$ 等空间都是线性空间，同时也是度量空间.

本章着重介绍在应用中最重要的一类特殊的抽象空间，即赋范线性空间与 Banach 空间及其上定义的线性算子与线性泛函的理论.

§1　赋范线性空间与 Banach 空间

本节主要介绍赋范线性空间与 Banach 空间的基本概念、基本性质以及有限维赋范线性空间的特征等内容.

§1.1　线性空间、线性算子与线性泛函

定义 1.1　设 X 是一个非空集合，$\boldsymbol{K}$ 是数域(实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$). 如果在 X 中规定了线性运算 —— 元素的加法和数与元素的乘法，且满足下述条件：

(A) X 关于加法成为交换群,即对任意 $x,y\in X$,对应一元素 $u\in X$,称为 x 与 y 的和,记为 $u=x+y$,且满足

(1) $x+y=y+x$ (加法交换律);

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (加法结合律);

(3) X 中存在零元,记作 θ,使得对任意 $x\in X$,都有 $x+\theta=x$;

(4) 对任意 $x\in X$,存在 $x'\in X$,使得 $x+x'=\theta$;通常称 x' 为 x 的负元,且记 $x'=-x$.

(B) 对任意 $x\in X$ 及任意 $\lambda\in \boldsymbol{K}$,对应一元素 $v\in X$,称为 λ 与 x 的数积,记为 $v=\lambda x$,且对任意 $x,y\in X$ 及任意 $\lambda,\mu\in \boldsymbol{K}$ 满足

(5) $1x=x$;

(6) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ (数乘结合律);

(7) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$
(8) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ } (数乘分配律),

则称 X 为(数域 $\boldsymbol{K}$ 上的)**线性空间**或**向量空间**. X 中的元素也称为**向量**或**点**. 当 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ 时,称 X 为实线性空间,当 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ 时,称 X 为复线性空间.

由定义不难证明,对任意 $x\in X,\lambda\in \boldsymbol{K}$,有

$$0x=\theta,\quad \lambda\theta=\theta,\quad (-1)x=-x.$$

例 1.1 空间 $\boldsymbol{K}^n$ $\boldsymbol{K}^n\triangleq\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in \boldsymbol{K},\ i=1,2,\cdots,n\}$,对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in \boldsymbol{K}^n,\lambda\in \boldsymbol{K}$,定义加法与数乘运算为

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

则 $\boldsymbol{K}^n$ 是一个线性空间. 特别地,当 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 时,记为 $\boldsymbol{R}^n$ 或 $\boldsymbol{C}^n$.

例 1.2 空间 $C[a,b]$ $C[a,b]$ 表示定义在 $[a,b]$ 上全体

连续的实(复)值函数之集,对任意 $x(t),y(t)\in C[a,b]$ 及任意 $\lambda\in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$,定义加法和数乘运算为

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),$$
$$(\lambda x)(t)=\lambda x(t),$$

则 $C[a,b]$ 是一个实(复)线性空间,称为连续函数空间.

例 1.3 空间 $\boldsymbol{K}^{m\times n}$ $\boldsymbol{K}^{m\times n}$ 表示元素为数域 $\boldsymbol{K}$ 中的全体 $m\times n$ 矩阵之集,按通常的矩阵加法和数与矩阵的乘法,$\boldsymbol{K}^{m\times n}$ 是一个线性空间.

例 1.4 空间 $C^{(n)}[a,b]$ $C^{(n)}[a,b]$ 表示定义在 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导数的全体实(复)值函数之集,按例 1.2 定义的加法和数乘运算,$C^{(n)}[a,b]$ 是一个实(复)线性空间.

例 1.5 空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$

$l^p\triangleq\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\,\middle|\,\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<+\infty\right\}$,对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in l^p$,以及任意 $\lambda\in\boldsymbol{K}$,定义加法和数乘运算为

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n,\cdots),$$
$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n,\cdots),$$

则由 Minkowski 不等式,有

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}<+\infty,$$

故 $x+y\in l^p$,而 $\lambda x\in l^p$ 显然,所以前面定义的线性运算是有意义的,且容易验证定义 1.1 中的条件(1) - (8) 均满足,因此 l^p 是一个线性空间.

类似地,对于有界数列空间 l^∞(参见第二章例 1.4),按上面定义的线性运算也是一个线性空间.

例 1.6 空间 $L^p[a,b]\ (1\leqslant p<+\infty)$

$$L^p[a,b] \triangleq \left\{ x(t) \text{ 为}[a,b]\text{上 Lebesgue 可测函数} \,\middle|\, \int_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t < +\infty \right\},$$

其上的加法和数乘运算与例 1.2 相同，利用积分形式的 Minkowski 不等式即知上述线性运算有意义，且满足定义 1.1 中的八个条件，故 $L^p[a,b]$ 是一个线性空间. 但要注意 $L^p[a,b]$ 中的零元为在$[a,b]$上几乎处处为零的函数，而 $C[a,b]$ 中的零元是$[a,b]$上恒等于零的函数.

下面介绍线性空间中的一些重要概念.

线性子空间 设 X 为数域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间，$M \subset X$ 为非空子集，如对任意 $x, y \in M$ 及任意 $\lambda \in \boldsymbol{K}$，有 $x + y \in M$ 及 $\lambda x \in M$，则称 M 为 X 的线性子空间(简称子空间). 例如，X 和 $\{\theta\}$ 都是 X 的子空间，$C[a,b]$ 是 $L^p[a,b]$ $(p \geqslant 1)$ 的子空间. 若 $M \neq X$，则称 M 为 X 的真子空间.

子集张成的子空间 设 M 为线性空间 X 的非空子集，以 $\mathrm{span}M$ 表示 M 中元素所有可能的线性组合构成的集合，即

$$\mathrm{span}M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, x_i \in M, \lambda_i \in \boldsymbol{K}, n \in \boldsymbol{N} \right\},$$

易证 $\mathrm{span}M$ 为 X 的子空间，称为由子集 M 张成的子空间.

线性相关与线性无关 设 X 为数域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间，$x_i \in X (i = 1,2,\cdots,n)$，若存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \boldsymbol{K}$，使得 $k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = \theta$，则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性相关，否则，称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关. 由定义可知，若由 $k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = \theta$ 可推出 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关.

基与维数 设 X 为线性空间，若 X 中存在 n 个线性无关的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得对任意 $x \in X$，x 都可表示为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合，即 $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ $(\lambda_i \in \boldsymbol{K}, i = 1,2,\cdots,n)$，则称

$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 X 的一个基，而 n 称为 X 的维数，记作 $\dim X = n$，此时称 X 为 n 维线性空间. 特别地，若 $X = \{\theta\}$，则称 X 为零维线性空间，且 $\dim\{\theta\} = 0$. 所有维数为有限数 n $(n = 0,1,2,\cdots)$ 的线性空间统称为有限维线性空间，非有限维的线性空间称为无限维线性空间，此时 $\dim X = +\infty$. 泛函分析研究的主要对象是无限维空间及其上的映射(称为算子或泛函).

例如，$\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}^n$ 都是 n 维线性空间，而 $C[a,b]$，l^p，$L^p[a,b]$ $(p \geqslant 1)$ 等空间都是无限维线性空间.

线性同构 设 X_1, X_2 为同一数域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间，若存在从 X_1 到 X_2 上的某个一一映射 T，使得对任意 $x, y \in X_1$ 及任意 $\lambda \in \boldsymbol{K}$，满足

$$T(x+y) = Tx + Ty, \quad T(\lambda x) = \lambda Tx,$$

则称 X_1 与 X_2 是线性同构的，映射 T 称为 X_1 到 X_2 上的线性同构映射.

可以证明，任一 n 维线性空间 X 都与 $\boldsymbol{R}^n$ (或 $\boldsymbol{C}^n$) 线性同构.

现在介绍线性空间上的线性算子与线性泛函的概念.

定义 1.2 设 X, Y 为数域 $\boldsymbol{K}$ 上的两个线性空间，T 是从 X 到 Y 的一个映射，如对任意的 $x, y \in X$ 及任意的 $\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$，都成立

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty,$$

则称 T 是**线性算子**. X 称为 T 的定义域，记为 $D(T) = X$，$N(T) \triangleq \{x \in X \mid Tx = \theta\}$ 为 T 的零空间，$R(T) \triangleq \{Tx \mid x \in X\}$ 为 T 的值域，易证它们都是线性空间. 特别地，当 $Y = \boldsymbol{K}$ 时，称 T 是**线性泛函**，对于线性泛函，常用小写字母(如 f) 来表示，且记 fx 为 $f(x)$.

例 1.7 设 X 为数域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间，$a \in \boldsymbol{K}$，a 为常数，映射 $T: X \to X$ 定义为 $Tx = ax$ $(\forall x \in X)$. 容易验证 T 为线性算子，称为相似算子，记作 aI. 当 $a = 0$ 时，称 T 为零算子，仍用 0

表示;当 $a = 1$ 时,称 T 为单位算子或恒等算子,记作 I.

例 1.8 有限维线性空间上的线性算子与线性泛函的一般形式.

设 X 为数域 $\mathbf{K}$ 上的一个 n 维线性空间,取定 X 的一个基记作 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 对于任意一个 n 阶矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$,定义映射 $T:X\to X$ 如下:

$$\text{当 } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ 时,令 } Tx = \sum_{i=1}^{n} x_i Te_i,$$

其中
$$Te_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j (i = 1,2,\cdots,n).$$

由定义容易验证 T 是一个线性算子,它在线性代数中被称为线性变换.

$$\text{因为}\quad Tx = \sum_{i=1}^{n} x_i Te_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j\Big)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\Big)e_j \triangleq \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

此处
$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i (j = 1,2,\cdots,n).$$

由此可见,T 由矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 所惟一确定,有时直接记为 $T = (a_{ij})_{n\times n}$,并称 T 是由矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 确定的算子.

反过来,设 $T:X\to X$ 是任一线性算子,由于 Te_i 是 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的线性组合,故必有矩阵 $(b_{ij})_{n\times n}$ 使得

$$Te_i = b_{1i}e_1 + b_{2i}e_2 + \cdots + b_{ni}e_n = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j (i = 1,2,\cdots,n),$$

因此,当 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ 时,由 T 的线性性可得

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} x_i Te_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i\right)e_j$$，即 T 是由矩阵$(b_{ij})_{n\times n}$ 确定的算子.

故在有限维线性空间上，对于确定的基而言，线性算子与矩阵是一一对应的.

下面考察 X 上的线性泛函的表示.

对于任意一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \in \boldsymbol{K}$，定义映射 $f:X\to \boldsymbol{K}$ 如下：

当 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ 时，令 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$，显然 f 是X 上的线性泛函，且有 $f(e_i) = \lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$.

另一方面，设 $g:X\to \boldsymbol{K}$ 是线性泛函，则只要令 $\mu_i = g(e_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，g 便可表示为下列形式

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i .$$

因此，在有限维线性空间上，线性泛函与数组之间存在着一一对应关系.

例 1.9 定义映射 $T:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b]$ 如下：

$$Tx(t) = x'(t) \quad (\forall x(t) \in C^{(1)}[a,b]),$$

则 T 是一个线性算子，称为微分算子.

例 1.10 定义映射 $f:C[a,b]\to \boldsymbol{R}$ 如下：

$$f(x(t)) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t \ (\forall x(t) \in C[a,b]),$$

则由定积分的性质可知 f 是$C[a,b]$ 上的线性泛函.

§1.2 赋范线性空间与 Banach 空间

作为欧氏空间中向量长度概念的推广，本节在线性空间中对向量引入范数，得到赋范线性空间的概念.

定义 1.3 设 X 为数域$\boldsymbol{K}$ 上的线性空间，如对任意的 $x \in X$，

都有一个确定的实数 $\|x\|$ 与之对应,并满足下述条件(**范数公理**):

(1) **正定性** 对 $\forall x \in X$, $\|x\| \geqslant 0$; 且 $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$;

(2) **正齐次性** 对 $\forall x \in X$ 及 $\lambda \in \boldsymbol{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(3) **三角不等式** 对 $\forall x, y \in X$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$; 则称 $\|x\|$ 为向量 x 的**范数**, X 按范数 $\|\cdot\|$ 成为**赋范线性空间**(简称**赋范空间**),记为 $(X, \|\cdot\|)$ 或简记为 X.

有了范数,我们就可以在 X 中定义一个度量 d, 即对 $\forall x, y \in X$, $d(x,y) \triangleq \|x - y\|$, 易证 (X,d) 是一个度量空间;称 d 为由范数诱导的度量,因此赋范线性空间是一种特殊的度量空间.

定义 1.4 设 X 为赋范线性空间,点列 $\{x_n\} \subset X$, 如存在 $x \in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, 则称 $\{x_n\}$ 按范数收敛于 x, x 称为 $\{x_n\}$ 的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 或 $x_n \to x (n \to \infty)$, 此时也称 $\{x_n\}$ 为 X 中的收敛点列.

定义 1.5 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, d 为由范数 $\|\cdot\|$ 诱导的度量,如果 (X,d) 作为度量空间是完备的,则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为 **Banach 空间**,也简称 X 为 Banach 空间.

下面举一些常见的赋范线性空间和 Banach 空间的例子.

例 1.11 设 $p \geqslant 1$, 对 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, 定义 $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, 则 $(\boldsymbol{R}^n, \|\cdot\|_p)$ 是 Banach 空间.

证 首先验证 $(\boldsymbol{R}^n, \|\cdot\|_p)$ 是赋范线性空间.

易证 $\|\cdot\|_p$ 满足定义 1.3 中的正定性和正齐次性条件;由 Minkowski 不等式知三角不等式也成立,因此 $(\boldsymbol{R}^n, \|\cdot\|_p)$ 是赋范线性空间.

再证完备性.

$\boldsymbol{R}^n$ 中由范数 $\|\cdot\|_p$ 诱导的度量 d_p 为

$$d_p(x,y)=\|x-y\|_p=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$.

由第二章例 3.3 知$(\boldsymbol{R}^n,d_p)$为完备的度量空间,因此由定义即知$(\boldsymbol{R}^n,\|\cdot\|_p)$是 Banach 空间.

当 $p=2$ 时,称 $\|\cdot\|_2$ 为 Euclid 范数,称$(\boldsymbol{R}^n,\|\cdot\|_2)$为 n 维 Euclid 空间(简称欧氏空间),简记为 $\boldsymbol{R}^n$. 特别地,当 $n=3$ 时,$\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$,这就是大家熟知的三维向量的模(长度).

在 $\boldsymbol{R}^n$ 中还可以引入不同于 $\|\cdot\|_p$ 的范数,参见习题 3.1 的第 4 题.

例 1.12 空间 $\boldsymbol{C}^n$ 按照上例中定义的 $\|\cdot\|_p$ 也是 Banach 空间. 称$(\boldsymbol{C}^n,\|\cdot\|_2)$为 n 维复欧氏空间(酉空间),简记为 $\boldsymbol{C}^n$.

例 1.13 在连续函数空间 $C[a,b]$ 中,对任意 $x(t)\in C[a,b]$,定义 $\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$,则 $C[a,b]$ 按 $\|\cdot\|$ 成为 Banach 空间.

证 容易验证 $C[a,b]$ 按 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间. 在 $C[a,b]$ 中由范数 $\|\cdot\|$ 诱导的度量 d 为

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\,(\forall\, x(t),y(t)\in C[a,b]).$$

由第二章例 3.4 知$(C[a,b],d)$是完备的度量空间,因此由定义即知$(C[a,b],\|\cdot\|)$为 Banach 空间.

例 1.14 在 $l^p(p\geqslant 1)$ 中,对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^p$,定义 $\|x\|_p=\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{1/p}$,由 Minkowski 不等式易验证$(l^p,\|\cdot\|_p)$为赋范线性空间,由第二章例 3.6 可知$(l^p,\|\cdot\|_p)$是 Banach 空间.

例 1.15 在 $L^p[a,b]\ (p\geqslant 1)$ 中,对任意 $x(t)\in L^p[a,b]$,定义 $\|x\|_p=\left(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}m\right)^{1/p}$,则 $(L^p[a,b],\|\cdot\|_p)$ 为 Banach 空间.

对于例 1.15,利用 Minkowski 不等式容易证明 $(L^p[a,b],\|\cdot\|_p)$ 是赋范线性空间,但其完备性证明较难,此处从略.

例 1.16 在有界数列空间 l^∞ 中,对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^\infty$,定义 $\|x\|_\infty=\sup\limits_n|x_n|$,易证 l^∞ 按 $\|\cdot\|_\infty$ 成为赋范线性空间,由第二章例 3.5 可知 $(l^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ 为 Banach 空间.

注:存在不完备的赋范线性空间. 例如将 $C[a,b]$ 的范数换为 $\|x\|_2=\left(\int_a^b|x(t)|^2\mathrm{d}m\right)^{1/2}$ 时就成为不完备的赋范线性空间(证明从略).

§1.3 赋范线性空间的基本性质

由于赋范线性空间是度量空间(其上度量由范数诱导),所以关于度量空间的一般性质在赋范线性空间中也成立. 另一方面,在赋范线性空间中有线性运算和度量两种结构,它们之间有一定的联系.

定理 1.1 设 X 为赋范线性空间,$x_n,y_n,x,y\in X$,$\lambda_n,\lambda\in\boldsymbol{K}$,若 $x_n\to x$,$y_n\to y$,$\lambda_n\to\lambda$,则 $x_n+y_n\to x+y$,$\lambda_nx_n\to\lambda x$.

证 因为 $\|x_n-x\|\to 0$,$\|y_n-y\|\to 0$,$|\lambda_n-\lambda|\to 0$,所以由 $\|(x_n+y_n)-(x+y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|$ 知

$$x_n+y_n\to x+y.$$

由于 $\|\lambda_nx_n-\lambda x\|=\|(\lambda_nx_n-\lambda x_n)+(\lambda x_n-\lambda x)\|\leqslant|\lambda_n-\lambda|\,\|x_n\|+|\lambda|\,\|x_n-x\|$,且 $\{\|x_n\|\}$ 为有界数列,故 $\|\lambda_nx_n-\lambda x\|\to 0$,即 $\lambda_nx_n\to\lambda x$.

定理 1.2(范数的连续性) 设 X 为赋范线性空间,x_n,$x \in X$,若 $x_n \to x$,则 $\|x_n\| \to \|x\|$.

证 由 $\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\|$

得
$$\|x_n\| - \|x\| \leqslant \|x_n - x\|. \tag{3.1}$$

另一方面,由于 $\|x\| = \|x - x_n + x_n\|$
$$\leqslant \|x - x_n\| + \|x_n\|,$$

所以
$$\|x\| - \|x_n\| \leqslant \|x - x_n\| = \|x_n - x\|. \tag{3.2}$$

综合(3.1),(3.2) 得$\big|\,\|x_n\| - \|x\|\,\big| \leqslant \|x_n - x\|$,因为 $\|x_n - x\| \to 0$,故 $\|x_n\| \to \|x\|$.

定义 1.6 设 X 为线性空间,M 为 X 的子集,若对 $\forall x, y \in M$,$\{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\} \subset M$,则称 M 为 X 中的**凸集**.

由定义易知 X 的任一线性子空间都是凸集.

定理 1.3 设 X 为赋范线性空间,则 X 中的球(开或闭的)是凸集.

证 以开球 $B(x_0, r) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\}$ 为例来证明.

对 $\forall x, y \in B(x_0, r)$,令 $z = \lambda x + (1-\lambda)y\ (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$,则有

$$\begin{aligned}\|z - x_0\| &= \|\lambda x + (1-\lambda)y - x_0\| \\ &= \|\lambda x + (1-\lambda)y - [\lambda x_0 + (1-\lambda)x_0]\| \\ &\leqslant \lambda\|x - x_0\| + (1-\lambda)\|y - x_0\| \\ &< \lambda r + (1-\lambda)r = r,\end{aligned}$$

即 $z \in B(x_0, r)$,故 $B(x_0, r)$ 为凸集.

对闭球 $\overline{B}(x_0, r)$,类似地可以证明.

定义 1.7 设 X 是线性空间,$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数.如果存在正数 c_1 和 c_2,使得对 $\forall x \in X$,有 $c_1\|x\|_1 \leqslant$

$\| x \|_2 \leqslant c_2 \| x \|_1$,则称范数 $\| \cdot \|_1$ 与 $\| \cdot \|_2$ 是等价的.

由定义可知,若 $\| \cdot \|_1$ 与 $\| \cdot \|_2$ 等价,则 $\| \cdot \|_2$ 与 $\| \cdot \|_1$ 也等价.

定理 1.4 设 $\| \cdot \|_1$ 和 $\| \cdot \|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数,则 $\| \cdot \|_1$ 与 $\| \cdot \|_2$ 等价的充分必要条件是:在$(X, \| \cdot \|_1)$ 和$(X, \| \cdot \|_2)$ 中点列的收敛性是相同的,即

$$\| x_n - x \|_1 \to 0 \Longleftrightarrow \| x_n - x \|_2 \to 0.$$

证 必要性由定义 1.7 容易证明. 下证充分性, 即假定 $\| x_n - x \|_1 \to 0 \Longleftrightarrow \| x_n - x \|_2 \to 0$, 要证明存在正数 c_1, c_2, 使得 $c_1 \| y \|_1 \leqslant \| y \|_2 \leqslant c_2 \| y \|_1$ 对 $\forall y \in X$ 成立.

反证法 假定不存在 $c_2 > 0$,使得对 $\forall y \in X$,有 $\| y \|_2 \leqslant c_2 \| y \|_1$,则对 $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exists x_n \in X$,使得 $\| x_n \|_2 > n \| x_n \|_1$,因此$\left\| \frac{x_n}{\| x_n \|_2} \right\|_2 > n \left\| \frac{x_n}{\| x_n \|_2} \right\|_1$.

令 $y_n = \frac{x_n}{\| x_n \|_2}$,便有 $\| y_n \|_2 > n \| y_n \|_1$,且 $\| y_n \|_2 = 1$,从而 $\| y_n \|_1 < \frac{1}{n}$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}$ 成立,因此 $\| y_n - \theta \|_1 \to 0$,但 $\| y_n - \theta \|_2 = 1$不趋于0,这与假设条件矛盾. 所以存在 $c_2 > 0$,使得 $\| y \|_2 \leqslant c_2 \| y \|_1$ 对 $\forall y \in X$ 成立.

同理可证,存在 $c > 0$,使得 $\| y \|_1 \leqslant c \| y \|_2$ 对 $\forall y \in X$ 成立. 令 $c_1 = \frac{1}{c}$,则有

$$c_1 \| y \|_1 \leqslant \| y \|_2 \leqslant c_2 \| y \|_1 (\forall y \in X),$$

即 $\| \cdot \|_1$ 与 $\| \cdot \|_2$ 等价,充分性得证.

§1.4 有限维赋范线性空间的性质与特征

有限维赋范线性空间是指维数为有限的赋范线性空间, 自然

具有上面所论述的基本性质,此外,它还具有一些特殊的性质.

定理 1.5 设$(X, \|\cdot\|)$为 n 维赋范线性空间,$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 X 的一个基,则必存在两个正数 m, M,使得对一切 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$,成立

$$m\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \|x\| \leqslant M\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}. \quad (3.3)$$

证 对 $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$,有

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\|$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2},$$

令 $M = \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{1/2}$,则 $\|x\| \leqslant M\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$. (3.4)

下证(3.3)式左方的不等式也成立.

以下就 X 为实赋范线性空间予以证明,对复空间情形,证明完全类似.

记 $S \triangleq \left\{u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \boldsymbol{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} |u_n|^2 = 1\right\}$ 为欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的单位球面,则 S 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界闭集,因而是紧集.

定义函数 $f: S \to \boldsymbol{R}$ 如下:

$$f(u) = \left\|\sum_{i=1}^{n} u_i e_i\right\| \ (\forall u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in S).$$

下面证明 f 的连续性. 对 $\forall u = (u_1, u_2, \cdots, u_n), v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in S$,由(3.4)式,得

$$|f(u) - f(v)| = \left|\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i e_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right\|\right|$$

$$\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i e_i - \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i) e_i \right\|$$

$$\leqslant M \left(\sum_{i=1}^{n} | u_i - v_i |^2 \right)^{1/2}.$$

由此可知,f 是 S 上的连续函数.

因为 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集,故由第二章 §4 知 f 在 S 上可达到最小值,记为 m,而由 f 的定义知 f 在 S 上恒取正值,所以 $m > 0$,故有

$$f(u) = \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \right\| \geqslant m \ (\forall u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in S).$$

现对 $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$,当 $x = \theta$ 时,(3.3) 式左方不等式显然成立. 当 $x \neq \theta$ 时,由于

$$\left(\frac{x_1}{\left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2}}, \frac{x_2}{\left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2}}, \cdots, \frac{x_n}{\left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2}} \right) \in S,$$

故 $$m \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2}} e_i \right\| = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2}} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|,$$

即 $$m \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2} \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| = \| x \|. \tag{3.5}$$

综合(3.4),(3.5) 两式即得(3.3) 式.

定理 1.6(范数等价定理) 设 X 为有限维线性空间,则 X 上的任意两个范数都是等价的.

证 设 $\dim X = n$, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 X 的一个基, $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ 为 X 上的任意两个范数.

由定理 1.5 知，存在正数 m_1, m_2, M_1, M_2，使得对 $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$，成立下面两式

$$m_1 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \leqslant \| x \|_1 \leqslant M_1 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2},$$

$$m_2 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \leqslant \| x \|_2 \leqslant M_2 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2},$$

令 $c_1 = \dfrac{m_2}{M_1}$，$c_2 = \dfrac{M_2}{m_1}$，则有

$$c_1 \| x \|_1 \leqslant \| x \|_2 \leqslant c_2 \| x \|_1,$$

由定义 1.7 即知 $\| \cdot \|_1$ 与 $\| \cdot \|_2$ 等价.

定义 1.8 设 X, Y 为同一数域上的两个赋范线性空间，如果存在映射 $T: X \to Y$，使得 T 既是线性同构映射又是同胚映射，则称 X 与 Y 是拓扑同构的.

定理 1.7 设 X 为 n 维实赋范线性空间，则 X 与欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是拓扑同构的. 当 X 为 n 维复赋范线性空间时，X 与酉空间 $\boldsymbol{C}^n$ 是拓扑同构的.

证 只证前一个命题，后一个的证明完全类似.

设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 X 的一个基，作映射 $T: X \to \boldsymbol{R}^n$ 如下：

$$Tx = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \left(\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X \right).$$

易知 $T: X \to \boldsymbol{R}^n$ 为一一映射，且是线性同构映射.

下证 T 是同胚映射.

对 $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$，由定理 1.5 知

$$m \| Tx \|_2 \leqslant \| x \| \leqslant M \| Tx \|_2. \tag{3.6}$$

对 $\forall$ 点列 $\{x_n\} \subset X$，$x_n \to x_0 \in X$，利用 T 的线性性及(3.6)式，得

$$m\|Tx_n - Tx_0\|_2 \leqslant \|x_n - x_0\| \leqslant M\|Tx_n - Tx_0\|_2,$$

由此可知 T,T^{-1} 都是连续映射，即 T 是同胚映射，因此 X 与 $\boldsymbol{R}^n$ 是拓扑同构的.

注：定理 1.7 说明在拓扑同构的意义下，n 维赋范线性空间与 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$（或 $\boldsymbol{C}^n$）是等同的，因此 $\boldsymbol{R}^n$（$\boldsymbol{C}^n$）可看成是 n 维赋范线性空间的模型.

推论 1.1 有限维赋范线性空间是 Banach 空间；任一赋范线性空间的有限维子空间是闭子空间.

证 由定理 1.7 中(3.6)式及 $\boldsymbol{R}^n$（$\boldsymbol{C}^n$）为 Banach 空间，直接得证.

定理 1.8 设 X 是有限维赋范线性空间，Y 为任意的赋范线性空间. 如果 $T:X\to Y$ 是线性算子，则 T 是连续的.

证 设 $\dim X = n$，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 X 的一个基，对 $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$，定义 $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$，易证 $\|\cdot\|_2$ 为 X 上的范数，由定理1.6知 $\|\cdot\|_2$ 与 X 上的范数 $\|\cdot\|$ 等价，因此存在 $M_1>0$，使得对 $\forall x\in X$，有 $\|x\|_2 \leqslant M_1\|x\|$.

对 X 中任意点列 $\{x_k\}$，如 $x_k\to x_0\in X$，要证明 $Tx_k\to Tx_0$.

设 $x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} e_i\ (k=1,2,\cdots)$，$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(0)} e_i$，

则
$$\begin{aligned}
\|Tx_k - Tx_0\| &= \|T(x_k - x_0)\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)} - x_i^{(0)})Te_i\right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|\,\|Te_i\| \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\|Te_i\|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\|Te_i\|^2\right)^{1/2}\|x_k - x_0\|_2
\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \| Te_i \|^2 \right)^{1/2} M_1 \| x_k - x_0 \|,$$

由此便知当 $x_k \to x_0$ 时，$Tx_k \to Tx_0$，故 T 连续.

在区别有限维与无限维赋范线性空间的某些特征方面，下面的 F. Riesz 引理起着关键的作用.

定理 1.9(F. Riesz 引理) 设 M 是赋范线性空间 X 的真闭子空间，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $x_0 \in X$，使得 $\| x_0 \| = 1$，且

$$\inf_{x \in M} \| x - x_0 \| \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{3.7}$$

证 因为 $M \neq X$，所以存在 $x_1 \in X \setminus M$，$x_1 \neq \theta$，令 $d = \inf_{x \in M} \| x_1 - x \|$，由于 M 为闭集，故 $d > 0$.（因为，如果 $d = 0$，则存在点列 $\{x_n\} \subset M$，$\| x_1 - x_n \| \to d = 0$，即 $x_n \to x_1 \in \overline{M} = M$，这与 $x_1 \notin M$ 矛盾）

不妨设 $0 < \varepsilon < 1$（否则(3.7) 式显然成立），由于$\dfrac{d}{1-\varepsilon} > d$，由下确界的定义，存在 $y_1 \in M$，使得

$$\| x_1 - y_1 \| < \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

令 $\quad x_0 = \dfrac{x_1 - y_1}{\| x_1 - y_1 \|}$ （注意 $x_1 \neq y_1$，$\| x_1 - y_1 \| > 0$），

则 $\quad \| x_0 \| = 1$，且对任意 $x \in M$，有

$$\| x - x_0 \| = \left\| x - \frac{x_1 - y_1}{\| x_1 - y_1 \|} \right\|$$

$$= \frac{1}{\| x_1 - y_1 \|} \| (\| x_1 - y_1 \| x + y_1) - x_1 \|,$$

因为 $x, y_1 \in M$，故 $\| x_1 - y_1 \| x + y_1 \in M$，且

$$\| (\| x_1 - y_1 \| x + y_1) - x_1 \| \geqslant d.$$

从而 $\quad \| x - x_0 \| \geqslant \dfrac{d}{\| x_1 - y_1 \|} > 1 - \varepsilon \ (\forall x \in M)$，

即 $\inf_{x\in M}\|x-x_0\|\geqslant 1-\varepsilon$,(3.7) 式得证.

定理 1.10 赋范线性空间 X 为有限维的充要条件是 X 中的任意有界闭集是紧集.

证 必要性 设 $\dim X=n$,由定理 1.7 知 X 与 $\boldsymbol{R}^n(\boldsymbol{C}^n)$ 是拓扑同构的. 设 X 到 $\boldsymbol{R}^n(\boldsymbol{C}^n)$ 的拓扑同构映射为 T(具体定义见定理 1.7 中的证明),M 为 X 中的任意有界闭集,则 M 的象集 $T(M)\triangleq\{y\mid y=Tx,\forall x\in M\}$ 为 $\boldsymbol{R}^n(\boldsymbol{C}^n)$ 中的有界闭集,从而 $T(M)$ 为 $\boldsymbol{R}^n(\boldsymbol{C}^n)$ 中的紧集. 因为 T^{-1} 连续,由第二章知连续映射将紧集映成紧集,所以 $M=T^{-1}(T(M))$ 为 X 中的紧集.

充分性 设 X 中的任意有界闭集是紧集,由于 X 中的单位球面 $S\triangleq\{x\in X\mid \|x\|=1\}$ 是有界闭集(S 为闭集的证明留作练习),故 S 是 X 中的紧集. 下面要证明 X 是有限维的.

用反证法,设 X 是无限维的,任取 $x_1\in S$,令 $M_1=\operatorname{span}\{x_1\}$,则 M_1 为 X 中一维真闭子空间,由 F. Riesz 引理,存在 $x_2\in S$,使得

$$\|x-x_2\|\geqslant\frac{1}{2}\quad(\forall x\in M_1).$$

令 $M_2=\operatorname{span}\{x_1,x_2\}$,由上式可知 x_1,x_2 线性无关,故 M_2 为 X 中二维真闭子空间,再由 F. Riesz 引理,存在 $x_3\in S$,使得

$$\|x-x_3\|\geqslant\frac{1}{2}\quad(\forall x\in M_2),$$

此式表明 x_1,x_2,x_3 线性无关,且由于假定了 X 为无限维赋范线性空间,$M_3=\operatorname{span}\{x_1,x_2,x_3\}\neq X$. 依此类推,反复运用 F. Riesz 引理,便可得到 S 中的一个点列 $\{x_n\}$,使得

$$\|x_i-x_j\|\geqslant\frac{1}{2}\ (i\neq j),$$

显然 $\{x_n\}$ 的任一子序列都不是 Cauchy 列,因而 $\{x_n\}$ 没有收敛子

序列，这与 S 为紧集相矛盾，因此 X 是有限维赋范线性空间.

推论 1.2 设 X 为赋范线性空间，则下述四个条件彼此等价：

(1) X 是有限维的；

(2) X 中的任意有界闭集是紧集；

(3) X 中的单位球面 S 是紧集；

(4) X 中的单位闭球 $\overline{B}(\theta,1) \triangleq \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$ 是紧集.

习　题　3.1

1. 在线性空间 $C[a,b]$ 中，定义

$$Tx(t) = \int_a^t x(u)\mathrm{d}u \quad (\forall\, x(u) \in C[a,b]),$$

$$f(x) = \int_a^b x(u)\mathrm{d}u \quad (\forall\, x(u) \in C[a,b]),$$

验证 T 为线性算子，f 为线性泛函.

2. 设 X 为赋范线性空间，证明对 $\forall\, x, y \in X$，有

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\|.$$

3. 设 X 为赋范线性空间，$\{x_n\}$ 为 X 中的收敛点列，证明其极限惟一，且 $\{\|x_n\|\}$ 为有界集.

4. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，对 $\forall\, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，定义 $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$，证明 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的范数.

5. 在 $C[a,b]$ 中，对 $\forall\, x(t) \in C[a,b]$，定义 $\|x\| = \int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t$，证明 $\|\cdot\|$ 为 $C[a,b]$ 上的范数.

6. 在 $C^{(n)}[a,b]$ 中，对 $\forall\, x(t) \in C^{(n)}[a,b]$，定义 $\|x\| = \max\{\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|, \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|, \cdots, \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(n)}(t)|\}$，证明 $(C^{(n)}[a,b], \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间.

7. 设 X 为赋范线性空间，证明 X 中的单位球面 $S \triangleq \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ 为闭集.

8. 证明：Banach 空间 X 的子空间 M 是 Banach 空间的充要条件是 M 为

X 中的闭子空间.

9. 设 X、Y 为赋范线性空间, $T:X\to Y$ 是线性算子,证明: T 连续 $\Longleftrightarrow$ 对 X 中的任一点列 $\{x_n\}$,当 $x_n\to\theta$ 时,有 $Tx_n\to\theta$.

10. 设 X 为赋范线性空间,点列 $\{x_n\}\subset X, x_n\neq\theta\ (n=1,2,\cdots)$,若 $x_n\to x\ (x\neq\theta)$,证明 $\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\to\dfrac{x}{\|x\|}$.

11. 设 X 为赋范线性空间,点列 $\{x_m\}\subset X$,数列 $\{\lambda_n\}\subset \boldsymbol{K}$,且 $x_m\to x$, $\lambda_n\to\lambda$,证明 $\lambda_n x_m\to\lambda x\ (n,m\to\infty)$.

12. 设 X 为 Banach 空间,点列 $\{x_n\}\subset X$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ 收敛,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 在 X 中收敛(即证 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n\ (n=1,2,\cdots)$ 按 X 中的范数收敛).

13. 设 X, Y 为线性空间, $T:X\to Y$ 是一一对应的线性算子,证明逆算子 T^{-1} 也是线性算子.

§2 有界线性算子

赋范线性空间上的线性算子是泛函分析的主要研究对象之一,有关线性算子的理论在物理学、力学及工程技术中都有着重要的应用.本节介绍赋范线性空间上的有界线性算子的基本概念和基本性质.

§2.1 有界线性算子及其范数

第二章 §2.3 介绍了度量空间上一般连续映射的概念和基本性质,对于赋范线性空间上的线性算子,其连续性应理解为在由范数诱导的度量下的连续.

例 2.1 设 $X=Y=C[a,b]$, 范数为 $\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$,定义 $T:C[a,b]\to C[a,b]$ 为 $Tx(t)=\int_a^t x(u)\mathrm{d}u$

$(\forall x(t) \in C[a,b])$,则 T 是$C[a,b]$上的连续线性算子.

证 易知 T 是线性算子,下证 T 是连续的.

对 $\forall x(t),y(t) \in C[a,b]$,则

$$\begin{aligned}\| Tx(t) - Ty(t) \| &= \left\| \int_a^t (x(u) - y(u))\mathrm{d}u \right\| \\ &= \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \int_a^t (x(u) - y(u))\mathrm{d}u \right| \\ &\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^t | x(u) - y(u) | \mathrm{d}u \\ &\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^t \| x - y \| \mathrm{d}u \\ &= (b - a) \| x - y \|,\end{aligned}$$

由第二章 §2.3 可知 T 在$C[a,b]$上的每一点处都连续,因此 T 是$C[a,b]$上的连续线性算子.

下面引入有界线性算子的概念,后面将会知道,在赋范线性空间中,线性算子的有界性和连续性是等价的,这是线性算子所具有的特殊性质.

定义 2.1 设 X,Y 为赋范线性空间,$T:X \to Y$ 是线性算子,如存在常数 $K > 0$,使得

$$\| Tx \| \leqslant K \| x \| \quad (\forall x \in X) \tag{3.8}$$

成立,则称 T 为(X上的)**有界线性算子**,否则,称 T 为**无界线性算子**.

由定义知例 2.1 中的 T 是有界线性算子.

例 2.2 设 X 为赋范线性空间,定义 $I:X \to X$ 为 $Ix = x\ (\forall x \in X)$,称 I 为 X 上的恒等算子或单位算子,易知 I 为有界线性算子.

例 2.3 设 X,Y 为赋范线性空间,定义 $0:X \to Y$ 为 $0x = \theta\ (\forall x \in X)$,称0为 X 上的零算子,易知0为有界线性算子.

例 2.4 定义 $T:C[a,b]\to C[a,b]$ 如下:

$$Tx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t\ (\forall x(s)\in C[a,b]),$$

其中 $K(s,t)$ 在正方形闭区域 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续,称其为算子 T 的核(T 称为 Fredholm 积分算子),证明 T 为有界线性算子.

证 容易验证 T 是线性算子,下证 T 有界.

因为 $K(s,t)$ 在有界闭区域 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续,所以必有界,设对一切 $a\leqslant s\leqslant b, a\leqslant t\leqslant b$,有 $|K(s,t)|\leqslant M$ (M 为常数). 对 $\forall x(s)\in C[a,b]$,由

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)||x(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\mathrm{d}t\cdot\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| \\ &\leqslant M(b-a)\|x\|,\end{aligned}$$

知 T 是有界的,即 T 是有界线性算子.

例 2.5 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为一实矩阵,定义 $T:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ 为 $Tx=Ax\ (\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\boldsymbol{R}^n)$,则 T 是有界线性算子(称 T 为矩阵 A 所确定的算子).

证 易知 T 是线性算子,下证 T 是有界的.

对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\boldsymbol{R}^n$,记 $Tx=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$,其中 $y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\ (i=1,2,\cdots,m)$,由第一章 §5,有

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m y_i^2=\sum_{i=1}^m\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big)^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^m\Big[\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2}\Big]^2 \\ &= \|x\|_2^2\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^2,\text{令 } K^2=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^2,\end{aligned}$$

则 $\|Tx\|_2 \leqslant K\|x\|_2$,故 T 是有界线性算子.

例 2.6 设 X 为有限维赋范线性空间,Y 为任意赋范线性空间,$T:X \to Y$ 为线性算子,证明 T 是有界线性算子.

证 设 $\dim X = n$, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 X 的一个基,则对 $\forall x \in X$,x 可表示为 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,由于 T 线性,所以 $Tx = \sum_{i=1}^{n} x_i Te_i$,从而有

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i Te_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|Te_i\| \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|Te_i\| \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|.\end{aligned}$$

容易验证 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ 是X上一个范数,由于有限维赋范线性空间上的任意两个范数都等价(定理 1.6),所以存在常数 $M > 0$, 使得 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant M\|x\|$, 故 $\|Tx\| \leqslant M \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|Te_i\| \cdot \|x\|$, 即 T 是有界线性算子.

例 2.6 说明有限维赋范线性空间上的线性算子都是有界线性算子,但无限维赋范线性空间上的线性算子不一定都是有界的,见下例.

例 2.7 设 X 表示区间$[0,1]$上全体多项式构成的赋范线性空间(无限维),其范数为 $\|x\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$ $(\forall x(t) \in X)$. 定义 $T:X \to X$ 为

$$Tx(t) = x'(t), \quad (\text{微分算子})$$

则 T 是线性算子,但 T 为无界线性算子.

证 T 线性显然,下证 T 无界.

令 $x_n(t) = t^n \in X$ $(n = 1,2,\cdots)$,则 $\|x_n\| = \|t^n\| =$

$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|t^n| = 1$,但是 $Tx_n(t) = nt^{n-1}$,所以 $\|Tx_n\| = \|nt^{n-1}\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|nt^{n-1}| = n$,从而$\dfrac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = n \to \infty$,因此不可能存在常数 $K > 0$,使得 $\|Tx\| \leqslant K\|x\|$ 对 $\forall x \in X$ 成立,即 T 是无界线性算子.

定理 2.1 设 $T:X \to Y$ 为线性算子,则 T 是有界线性算子当且仅当 T 将 X 中的有界集映为 Y 中的有界集.

证 必要性 设 T 为有界线性算子,即存在 $K > 0$,使得对 $\forall x \in X$,有 $\|Tx\| \leqslant K\|x\|$. 设 A 为 X 中有界集,则存在 $M > 0$,使得对 $\forall x \in A$,有 $\|x\| \leqslant M$,从而对 $\forall x \in A$,有 $\|Tx\| \leqslant K\|x\| \leqslant KM$,即 $T(A)$ 为 Y 中的有界集.

充分性 取 $B \triangleq \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$ 为 X 中单位球,由假设知 $T(B)$ 为 Y 中有界集,即存在 $M > 0$,使得对 $\forall x \in B$,有 $\|Tx\| \leqslant M$.

对 $\forall x \in X, x \neq \theta$,则$\dfrac{x}{\|x\|} \in B$,故$\left\|T\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant M$,由于 T 是线性算子,所以$\left\|T\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \dfrac{1}{\|x\|}\|Tx\| \leqslant M$,即 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ $(\forall x \in X, x \neq \theta)$;当 $x = \theta$时,前式也成立,故 T 为有界线性算子.

由定理 2.1,我们对定义 2.1 有了更形象和直观的理解. 充分性的证明过程表明,当线性算子将单位球映为有界集时,它就是有界线性算子.

定理 2.2 设 $T:X \to Y$ 为线性算子,则 T 是X 上的连续线性算子当且仅当 T 在某一点$x_0 \in X$ 处连续.

证 必要性 显然成立.

充分性 对 $\forall x \in X$,若点列$\{x_n\} \subset X$,且 $x_n \to x$,则 $x_n - x + x_0 \to x_0$,因 T 在x_0 处连续,故 $T(x_n - x + x_0) \to$

Tx_0,即 $Tx_n - Tx + Tx_0 \to Tx_0$,从而 $Tx_n \to Tx$,由第二章 §2 知 T 在 x 处连续,再由 x 的任意性知 T 是 X 上的连续线性算子.

定理 2.3 设 $T:X \to Y$ 为线性算子,则 T 是有界线性算子当且仅当 T 是连续线性算子.

证 必要性 设 T 有界,即存在 $K > 0$,使对 $\forall x \in X$,有 $\|Tx\| \leqslant K\|x\|$.

对 $\forall x \in X$,设点列 $\{x_n\} \subset X$,且 $x_n \to x$,则

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leqslant K\|x_n - x\| \to 0,$$

即 $Tx_n \to Tx$,故 T 是连续线性算子.

充分性 用反证法,设 T 连续但无界,由定义 2.1 知,对 $\forall n \in \mathbf{N}$,存在 $x_n \in X, x_n \neq \theta$,使得 $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$,令 $y_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|} \in X$,则 $\|y_n - \theta\| = \|y_n\| = \dfrac{1}{n} \to 0$,由 T 的连续性,应有 $Ty_n \to T\theta = \theta$.但另一方面,

$$\|Ty_n\| = \left\|T\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|Tx_n\| > 1$$

$(n = 1,2,\cdots)$,两者相互矛盾,故 T 是有界线性算子.

下面引入有界线性算子的范数的概念.

设 $T:X \to Y$ 为有界线性算子,则存在 $K > 0$,使得对一切 $x \in X$,有 $\|Tx\| \leqslant K\|x\|$.当 T 为有界线性算子时,满足前式条件的正数 K 有无穷多个,我们定义所有这些 K 的下确界为算子 T 的范数,即有如下定义.

定义 2.2 设 $T:X \to Y$ 为有界线性算子,称 $\|T\| \triangleq \inf\{K > 0 \mid \|Tx\| \leqslant K\|x\|, \forall x \in X\}$ 为有界线性算子 T 的**范数**(下一小节将证明 $\|\cdot\|$ 确实满足范数公理).

由定义 2.2,可知下式成立:

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\| \quad (\forall x \in X). \tag{3.9}$$

关于有界线性算子的范数，有下面的定理，可看成是范数 $\|T\|$ 的等价定义，定理本身也提供了求算子范数的常用公式.

定理 2.4 设 $T:X\to Y$ 为有界线性算子，

则
$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}\|Tx\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leqslant 1}}\|Tx\|. \tag{3.10}$$

证 由定义 2.2，知

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \inf\{K>0 \mid \|Tx\|\leqslant K\|x\|, \forall x\in X\}\\
&= \inf\{K>0 \mid \|Tx\|\leqslant K\|x\|, \forall x\in X, x\neq\theta\}\\
&= \inf\left\{K>0 \,\middle|\, \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant K, \forall x\in X, x\neq\theta\right\}\\
&= \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}}\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\\
&= \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}\|Tx\|.
\end{aligned}$$

再证
$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}\|Tx\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leqslant 1}}\|Tx\|. \tag{3.11}$$

因为 $\{\|Tx\| \mid x\in X, \|x\|=1\}\subset\{\|Tx\| \mid x\in X, \|x\|\leqslant 1\}$，

所以
$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}\|Tx\| \leqslant \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leqslant 1}}\|Tx\|. \tag{3.12}$$

另一方面，由 (3.9) 式，当 $\|x\|\leqslant 1$ 时，有 $\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|\leqslant\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}\|Tx\|$（前面已证得），故

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leqslant 1}}\|Tx\| \leqslant \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}\|Tx\|. \tag{3.13}$$

结合(3.12)，(3.13) 两式即知(3.11) 式成立，从而(3.10) 式得证.

一般情况下，计算有界线性算子的范数是比较困难的事，下面举几个较简单的例子用以说明，希望能对读者有所启示.

例 2.8 设 $X\neq\{\theta\}$，则 X 上的恒等算子的范数等于 1，零算

子的范数等于 0.

例 2.9 对于欧氏空间 $\boldsymbol{R}^2$,定义 $T:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$,此处 T 是由矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$所确定的算子,求 $\|T\|$.

解 对 $\forall x=(x_1,x_2)^T\in\boldsymbol{R}^2$,则

$$Tx=Ax=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1+x_2\\x_1+3x_2\end{pmatrix}.$$

$\|Tx\|_2=[(3x_1+x_2)^2+(x_1+3x_2)^2]^{1/2}=[10(x_1^2+x_2^2)+12x_1x_2]^{1/2}$,由定理 2.4,有

$$\begin{aligned}\|T\|&=\sup_{\substack{x\in\boldsymbol{R}^2\\\|x\|_2=1}}\|Tx\|_2=\sup_{x_1^2+x_2^2=1}(10+12x_1x_2)^{1/2}\\&=\sup_{x_1^2+x_2^2=1}[10-6((x_1-x_2)^2-1)]^{1/2}\\&=\sup_{x_1^2+x_2^2=1}[16-6(x_1-x_2)^2]^{1/2}=4.\end{aligned}$$

注:这里也可用高等数学中的 Lagrange 乘数法来求 $\sup\limits_{x_1^2+x_2^2=1}(10+12x_1x_2)^{1/2}$,读者可以试一试.

例 2.10 求例 2.1 中的有界线性算子 T 的范数.

解 由例 2.1 知,对 $\forall x(t)\in C[a,b]$,有

$$\|Tx\|\leqslant(b-a)\|x\|,$$

故

$$\|T\|\leqslant b-a. \tag{3.14}$$

另一方面,取 $x_0(t)\equiv1\in C[a,b]$,则 $\|x_0\|=1$,$\|Tx_0\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t x_0(u)\mathrm{d}u\right|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|t-a|=b-a$.

由定理 2.4,$\|T\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|\geqslant\|Tx_0\|=b-a$,再由(3.14)式便知 $\|T\|=b-a$.

例 2.11 定义 $T:L[a,b]\to C[a,b]$ 为

$$Tx(t)=\int_a^t x(u)\mathrm{d}u \quad (\forall\, x(t)\in L[a,b]),$$

此处 $C[a,b]$ 中的范数为 $\|x\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$. 证明 T 是有界线性算子,并求 $\|T\|$.

证 由 Lebesgue 积分的性质知 T 是从 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 中的线性算子. 下面证明 T 是有界线性算子.

对 $\forall\, x(t)\in L[a,b]$,则

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t x(u)\mathrm{d}u\right| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^t |x(u)|\mathrm{d}u \\ &= \int_a^b |x(u)|\mathrm{d}u = \|x\|_1 (L[a,b]\text{ 中的范数}),\end{aligned}$$

故 T 为有界线性算子,且 $\|T\|\leqslant 1$.

另一方面,取 $x_0(t)\equiv \dfrac{1}{b-a}\in L[a,b]$,则 $\|x_0\|_1 = 1$,

且有

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|_1=1}\|Tx\| \geqslant \|Tx_0\| \\ &= \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t \frac{1}{b-a}\mathrm{d}u\right| \\ &= \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\frac{t-a}{b-a}\right| = 1,\end{aligned}$$

即 $\|T\|\geqslant 1$,而前面已知 $\|T\|\leqslant 1$,故 $\|T\| = 1$.

例 2.12 对于例 2.11 中的算子 T,当把 T 看成 $L[a,b]\to L[a,b]$ 的算子时,则 $\|T\| = b-a$.

证 对 $\forall\, x(t)\in L[a,b]$,则

$$\begin{aligned}\|Tx\|_1 &= \int_a^b\left|\int_a^t x(u)\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^b\left(\int_a^t |x(u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^b\left(\int_a^b |x(u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \int_a^b \| x \|_1 dt = (b-a) \| x \|_1,$$

故 $\quad \| T \| \leqslant b - a.$

另一方面，对使得 $a + \frac{1}{n} < b$ 成立的任一 $n \in \mathbf{N}$（记所有这些 n 的集合为 P），作函数 $x_n(t)$ 如下：

$$x_n(t) = \begin{cases} n, & a \leqslant t \leqslant a + \frac{1}{n}, \\ 0, & a + \frac{1}{n} < t \leqslant b. \end{cases}$$

显然 $\| x_n \|_1 = 1$，且有

$$\begin{aligned} \| Tx_n \|_1 &= \int_a^b \left| \int_a^t x_n(u) du \right| dt \\ &= \int_a^{a+\frac{1}{n}} \left(\int_a^t n du \right) dt + \int_{a+\frac{1}{n}}^b \left| \int_a^t x_n(u) du \right| dt \\ &= \int_a^{a+\frac{1}{n}} n(t-a) dt + \int_{a+\frac{1}{n}}^b \left[\int_a^{a+\frac{1}{n}} n du + \int_{a+\frac{1}{n}}^t 0 du \right] dt \\ &= \frac{1}{2n} + \left(b - a - \frac{1}{n} \right) = b - a - \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

从而 $\| T \| = \sup\limits_{\| x \|_1 = 1} \| Tx \|_1 \geqslant \sup\limits_{n \in P} \| Tx_n \|_1 = b - a$，已证 $\| T \| \leqslant b - a$，故 $\| T \| = b - a$.

§2.2　有界线性算子的空间

设 X, Y 为同一数域 $\boldsymbol{K}$ 上的赋范线性空间，以 $B(X, Y)$ 表示从 X 到 Y 中的全体有界线性算子构成的集合（这里集合中的元素是算子），特别，当 $X = Y$ 时，记 $B(X, Y) = B(X)$.

下面在 $B(X, Y)$ 中引入线性运算.

对 $\forall T_1, T_2 \in B(X, Y)$ 及 $\forall \lambda \in \boldsymbol{K}$，

定义加法运算为

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x \ (\forall x \in X), \qquad (3.15)$$

定义数乘运算为

$$(\lambda T_1)x = \lambda T_1 x \ (\forall x \in X). \qquad (3.16)$$

显然,$T_1 + T_2$,λT_1 都是线性算子.

首先,关于 $B(X,Y)$ 有如下结论.

定理2.5 $B(X,Y)$ 按线性运算(3.15)与(3.16)及定义2.2中有界线性算子的范数 $\|\cdot\|$ 成为一个赋范线性空间.

证 先证 $B(X,Y)$ 为线性空间,由(3.15)与(3.16),只需证明对 $\forall T_1, T_2 \in B(X,Y)$ 及 $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,有

$$T_1 + T_2 \in B(X,Y), \quad \lambda T_1 \in B(X,Y).$$

事实上,对 $\forall x \in X$,

由于
$$\begin{aligned}\|(T_1+T_2)x\| &= \|T_1x + T_2x\| \\ &\leqslant \|T_1x\| + \|T_2x\| \\ &\leqslant \|T_1\|\|x\| + \|T_2\|\|x\| \\ &= (\|T_1\| + \|T_2\|)\|x\|,\end{aligned}$$

及
$$\begin{aligned}\|(\lambda T_1)x\| &= \|\lambda T_1 x\| = |\lambda|\|T_1x\| \\ &\leqslant |\lambda|\|T_1\|\|x\|,\end{aligned}$$

故 $T_1 + T_2 \in B(X,Y)$,$\lambda T_1 \in B(X,Y)$,因此 $B(X,Y)$ 是一个线性空间.

由定理2.4,可用 $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$ 作为 $B(X,Y)$ 中元素的范数,下证 $B(X,Y)$ 按 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间,即证 $\|\cdot\|$ 满足范数公理中的三个条件.

(1) 对 $\forall T \in B(X,Y)$,显然 $\|T\| \geqslant 0$,且当 $T = 0$ 时,$\|T\| = 0$;如果 $\|T\| = 0$,则对 $\forall x \in X$,有 $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\| = 0$,即 $Tx = \theta$,故 T 为零算子.

(2) 对 $\forall T \in B(X,Y)$ 及 $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,有

$$\|\lambda T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|(\lambda T)x\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|\lambda Tx\|$$
$$= |\lambda| \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|Tx\| = |\lambda| \|T\|.$$

(3) 由前面已知对 $\forall x \in X$,有

$$\|(T_1 + T_2)x\| \leqslant (\|T_1\| + \|T_2\|)\|x\|,$$

故 $\|T_1 + T_2\| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\| \quad (\forall T_1, T_2 \in B(X,Y))$.

因此,$B(X,Y)$ 是一个赋范线性空间.

定理 2.6 如果 Y 是 Banach 空间,则 $B(X,Y)$ 也是 Banach 空间.

证 设 $\{T_n\}$ 为 $B(X,Y)$ 中的任一 Cauchy 列,要证明 $\{T_n\}$ 在 $B(X,Y)$ 中收敛(按算子范数).

因为 $\{T_n\}$ 为 Cauchy 列,所以对 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,当 $n,m > N$ 时,有 $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$.

任取 $x \in X$,当 $n,m > N$ 时,有

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|, \tag{3.17}$$

故 $\{T_n x\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列,依假设 Y 是 Banach 空间,所以 $\{T_n x\}$ 在 Y 中收敛于 Y 中的一个元素,记为 y,即 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = y$.

现定义 $T: X \to Y$ 为

$$Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_n x \quad (\forall x \in X). \tag{3.18}$$

下面先证明 $T \in B(X,Y)$.

对 $\forall x_1, x_2 \in X$ 及 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$,有

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\lambda_1 T_n x_1 + \lambda_2 T_n x_2) \\ &= \lambda_1 \lim_{n\to\infty} T_n x_1 + \lambda_2 \lim_{n\to\infty} T_n x_2 \end{aligned}$$

$$= \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2,$$

故 T 为线性算子.

当 $n,m > N$ 时,由于 $|\|T_n\| - \|T_m\|| \leqslant \|T_n - T_m\| < \varepsilon$,故 $\{\|T_n\|\}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中 Cauchy 列,从而为有界数列,设 $\|T_n\| \leqslant K\ (n = 1,2,\cdots)$,则由 $\|T_n x\| \leqslant \|T_n\| \|x\| \leqslant K\|x\|$,令 $n \to \infty$,得 $\|Tx\| \leqslant K\|x\|\ (\forall x \in X)$,因此 T 为有界线性算子,即 $T \in B(X,Y)$.

最后证明 $\{T_n\}$ 按 $B(X,Y)$ 中的算子范数收敛于 T.

在(3.17)式中,令 $m \to \infty$,得

$\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon \|x\|$ 对一切 $x \in X$ 成立($n > N$ 时),所以有 $\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon\ (n > N)$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$.

至此已证明了 $B(X,Y)$ 为 Banach 空间.

下面对于 $B(X,Y)$ 中的算子列引入两个不同的收敛概念.

定义 2.3 设算子列 $\{T_n\} \subset B(X,Y)$,$T \in B(X,Y)$,如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$,则称算子列 $\{T_n\}$ **按范数收敛**于 T 或称 $\{T_n\}$ **一致收敛**于 T,记为 $T_n \to T\ (n \to \infty)$.

定义 2.4 设算子列 $\{T_n\} \subset B(X,Y)$,$T \in B(X,Y)$,如果对 $\forall x \in X$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$,则称算子列 $\{T_n\}$ **强收敛**于 T 或称 $\{T_n\}$ **点态收敛**于 T,记为 $T_n \xrightarrow{S} T(n \to \infty)$.

由定义易知,若 $\{T_n\}$ 按范数收敛于 T,则 $\{T_n\}$ 必强收敛于 T,下面的例子说明反过来不成立.

例 2.13 对 $\forall n \in \mathbf{N}$,定义 $T_n : l^2 \to l^2$ 如下:

$$T_n x = (0,0,\cdots,0,x_{n+1},x_{n+2},\cdots)$$

$(\forall x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) \in l^2)$,

证明:

(1) $T_n \in B(l^2)\quad (n = 1,2,\cdots)$;

(2) $\{T_n\}$ 强收敛于零算子 0,但 $\{T_n\}$ 并不按范数收敛于 0.

证 (1) 对 $\forall n \in \mathbf{N}$,易证 T_n 为线性算子.对 $\forall x \in l^2$,因为 $\| T_n x \|_2 = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} | x_i |^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^2 \right)^{1/2} = \| x \|_2$,所以 $\| T_n \| \leqslant 1$,即 $T_n \in B(l^2)\ (n = 1,2,\cdots)$.

(2) 对 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2 < +\infty$,从而 $\| T_n x - 0x \|_2 = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} | x_i |^2 \right)^{1/2} \to 0\ (n \to \infty)$,即 $\{T_n\}$ 强收敛于零算子 0.

今取 $e_n = (\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{个}},1,0,0,\cdots) \in l^2$,则 $\| e_n \|_2 = 1$,且 $\| T_n e_n \|_2 = 1$,从而

$$\| T_n \| = \sup_{\substack{x \in l^2 \\ \| x \|_2 = 1}} \| T_n x \|_2 \geqslant \| T_n e_n \|_2 = 1,$$

由前述已知 $\| T_n \| \leqslant 1$,故 $\| T_n \| = 1\ (n = 1,2,\cdots)$,从而 $\| T_n - 0 \| = 1 \nrightarrow 0$,即 $\{T_n\}$ 并不按范数收敛于零算子 0.

§2.3 紧算子

紧算子在积分方程及许多数学物理问题中都有着重要的应用,其性质与有限维空间上的算子相近似.本小节介绍紧算子的概念及基本性质,在本章的最后,我们再概略地介绍一下有关紧算子的谱理论.

定义 2.5 设 X, Y 为赋范线性空间,$T: X \to Y$ 为线性算子,如果对 X 中任意有界集 M,$T(M)$ 为 Y 中列紧集,则称 T 为**紧算子或全连续算子**.从 X 到 Y 的紧算子的全体记为 $C(X,Y)$,当 $X = Y$ 时,记为 $C(X)$.

定理 2.7 设 $T \in C(X,Y)$,则 $T \in B(X,Y)$,即紧算子必为有界线性算子.

证 由定义,对 X 中任一有界集 M,$T(M)$ 为 Y 中列紧集,而列紧集是有界集,故 $T(M)$ 是 Y 中有界集,由定理 2.1 知 T 是有界线性算子.

例 2.14 设 X 为无限维赋范线性空间,$I:X \to X$ 为恒等算子,则 I 不是紧算子.

证 反证法 如果 I 是紧算子,则对 X 中任一有界闭集 M,由于 $I(M) = M$,所以 M 为 X 中列紧的闭集,即 M 为 X 中紧集,由本章定理 1.10 知 X 为有限维赋范线性空间,这与假设条件矛盾,因此 I 不是紧算子.

例 2.15 设 $T \in B(X,Y)$,且值域 $R(T)$ 为 Y 中有限维赋范线性子空间,称这样的算子为**有限秩算子**.证明有限秩算子必为紧算子.

证 设 M 为 X 中任一有界集,因为 T 是有界线性算子,所以 $T(M)$ 是有限维赋范线性子空间 $R(T)$ 中的有界集,从而 $T(M)$ 为 Y 中的列紧集,因此 T 为紧算子.

例 2.16 考虑例 2.4 中的 Fredholm 积分算子 $T:C[a,b] \to C[a,b]$,$Tx(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t$,已知 $T \in B(C[a,b])$,证明 T 为紧算子.

证 设 M 为 $C[a,b]$ 中任一有界集,要证明 $T(M)$ 为 $C[a,b]$ 中的列紧集,由第二章中 Arzela-Ascoli 定理,只需证明 $T(M)$ 为 $C[a,b]$ 中有界集以及 $T(M)$ 中的函数是等度连续的即可.

因为 M 是 $C[a,b]$ 中有界集,所以存在常数 $K > 0$,使得 $\| x \| \leqslant K \ (\forall x \in M)$,记 $L = \max\limits_{a \leqslant s,t \leqslant b} |K(s,t)|$,则对 $\forall x \in M$,有

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \|x\| \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant KL(b-a),\end{aligned}$$

故 $T(M)$ 为 $C[a,b]$ 中有界集(由例 2.4,T 是有界线性算子,从而亦可知 $T(M)$ 为有界集).

另一方面,由于 $K(s,t)$ 在有界闭集$[a,b]\times[a,b]$上连续,故一致连续,因此对 $\forall \varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $s_1,s_2\in[a,b]$ 且$|s_1-s_2|<\delta$ 时,就有

$$|K(s_1,t)-K(s_2,t)|<\frac{\varepsilon}{K(b-a)}\ (\forall t\in[a,b]),$$

从而对一切 $x\in M$,当$|s_1-s_2|<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}|Tx(s_1)-Tx(s_2)| &\leqslant \int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t)||x(t)|\mathrm{d}t \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{K(b-a)}K\mathrm{d}t=\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $T(M)$ 中的函数是等度连续的,因此 $T(M)$ 为 $C[a,b]$ 中的列紧集,故 T 是紧算子.

下面介绍紧算子的一些基本性质.

定理 2.8 $C(X,Y)$ 是 $B(X,Y)$ 的线性子空间.

证 只要证明对 $\forall T_1,T_2\in C(X,Y)$ 及 $\forall \lambda\in \mathbf{K}$,$T_1+T_2,\lambda T_1\in C(X,Y)$ 即可.

设 M 为 X 中任一有界集,要证$(T_1+T_2)(M)=T_1(M)+T_2(M)$ 为 Y 中列紧集,为此设$\{x_n\}$ 为 M 中任一点列,则$(T_1+T_2)x_n=T_1x_n+T_2x_n$,因为 T_1 为紧算子,所以$\{T_1x_n\}$有收敛子列$\{T_1x_{n_k}\}$;又由于 T_2 为紧算子,故$\{T_2x_{n_k}\}$也有收敛子列$\{T_2x_{n_{k_i}}\}$,从而$\{(T_1+T_2)x_n\}$有收敛子列$\{(T_1+T_2)x_{n_{k_i}}\}$,即

$(T_1+T_2)(M)$ 为 Y 中列紧集，故 $T_1+T_2\in C(X,Y)$.

同理可证 $\lambda T_1\in C(X,Y)$.

因此，$C(X,Y)$ 为 $B(X,Y)$ 的线性子空间，按算子范数，$C(X,Y)$ 自然是一个赋范线性空间.

定理 2.9 设 X,Y,Z 为赋范线性空间，$S\in B(X,Y)$，$T\in B(Y,Z)$，如 S,T 中有一个是紧算子，则 TS 也是紧算子.

证 此处算子乘积 TS 即为映射的复合，易知 $TS\in B(X,Z)$.

设 S 为紧算子，M 为 X 中任一有界集，则 $S(M)$ 为 Y 中列紧集，因为 T 为有界线性算子，故 T 是连续线性算子，由第二章习题 2.4 第 8 题知 $T(S(M))$ 为 Z 中列紧集，即 $(TS)(M)$ 是 Z 中列紧集，从而 TS 是紧算子.

若 T 为紧算子，则对 X 中任一有界集 M，由于 $S(M)$ 为 Y 中有界集，故 $T(S(M))$ 为 Z 中列紧集，即 $(TS)(M)$ 为 Z 中列紧集，从而 TS 是紧算子.

定理 2.10 设 X 为赋范线性空间，Y 为 Banach 空间，则 $C(X,Y)$ 也是 Banach 空间.

证 由条件及定理 2.6 知 $B(X,Y)$ 是 Banach 空间，由定理 2.8 知 $C(X,Y)$ 是 $B(X,Y)$ 中赋范线性子空间，因此，只需证明 $C(X,Y)$ 为 $B(X,Y)$ 中的闭集即可.

设算子列 $\{T_n\}\subset C(X,Y)$，$T\in B(X,Y)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$，下证 $T\in C(X,Y)$，为此只要证明对于 X 中任一有界点列 $\{x_n\}$，点列 $\{Tx_n\}$ 有收敛子列即可.

因为 T_1 为紧算子，故必有 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_n^{(1)}\}$ 使 $\{T_1x_n^{(1)}\}$ 收敛，由于 $\{x_n^{(1)}\}$ 为有界点列，T_2 是紧算子，所以必有 $\{x_n^{(1)}\}$ 的子列 $\{x_n^{(2)}\}$ 使 $\{T_2x_n^{(2)}\}$ 收敛，……，如此继续下去，便可得到一串子列，将之排成下列形式：

$$\begin{array}{cccccc} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \cdots, & x_n^{(1)}, & \cdots \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \cdots, & x_n^{(2)}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & x_3^{(n)}, & \cdots, & x_n^{(n)}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

其中下面一行表示的点列是上面一行所表示的点列的子列.

现取由对角线元素构成的点列$\{x_n^{(n)}\}$,它是$\{x_n\}$的一个子列,且对 $\forall i \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_i x_n^{(n)}$ 存在. 下面证明$\{Tx_n^{(n)}\}$为 Y 中 Cauchy 列.

因为$\{x_n\}$有界,可设 $\|x_n\| \leqslant K$ $(n = 1,2,\cdots)$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$,故对 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $p \in \mathbf{N}$,使得 $\|T_p - T\| < \frac{\varepsilon}{3K}$. 又因 $\lim\limits_{n\to\infty} T_p x_n^{(n)}$ 存在,所以存在 $N > 0$,使得当 $m, n > N$ 时,有$\|T_p x_m^{(m)} - T_p x_n^{(n)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$,从而当 $m, n > N$ 时,有

$$\begin{aligned} &\|Tx_m^{(m)} - Tx_n^{(n)}\| \\ &\leqslant \|Tx_m^{(m)} - T_p x_m^{(m)}\| + \|T_p x_m^{(m)} - T_p x_n^{(n)}\| + \|T_p x_n^{(n)} - Tx_n^{(n)}\| \\ &< \|T - T_p\| \|x_m^{(m)}\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_p - T\| \|x_n^{(n)}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3K} \cdot K + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K} \cdot K = \varepsilon, \end{aligned}$$

故$\{Tx_n^{(n)}\}$为 Y 中Cauchy列,因为 Y 为Banach空间,所以$\{Tx_n^{(n)}\}$在 Y 中收敛,即点列$\{Tx_n\}$有收敛子列,因而 $T \in C(X,Y)$.

以上证明表明 $C(X,Y)$ 为 $B(X,Y)$ 中闭集,故 $C(X,Y)$ 也是 Banach 空间.

例 2.17 设 X 为无限维赋范线性空间,$T \in C(X,Y)$,则 T 不可能有定义在 Y 上的有界逆线性算子.

证 反证法 假定 T 有定义在 Y 上的有界逆线性算子 T^{-1}:

$Y \to X$,即 $T^{-1} \in B(Y,X)$,由定理2.9知恒等算子 $I = T^{-1}T$: $X \to X$ 是紧算子,因为 X 是无限维的,由例2.14,这是不可能的,得证.

关于紧算子还有其他一些性质,限于篇幅,不再介绍了.

习 题 3.2

1. 设 X,Y 为赋范线性空间,$T \in B(X,Y)$,证明零空间 $N(T) \triangleq \{x \in X \mid Tx = \theta\}$ 是 X 的闭线性子空间.

2. 设 T 是由矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 所确定的从欧氏空间 $\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的线性算子,求 $\|T\|$.

3. 设 T 是由 n 阶实对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 所确定的从欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的线性算子,证明 $\|T\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$,此处 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

4. 对于有界数列空间 l^∞,定义 $T: l^\infty \to l^\infty$ 为

$$Tx = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \cdots, \frac{1}{n}x_n, \cdots) \ (\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^\infty),$$

(1) 证明 $T \in B(l^\infty)$;

(2) 求 $\|T\|$.

5. 设 X,Y,Z 为赋范线性空间,$S \in B(X,Y)$,$T \in B(Y,Z)$,证明 $TS \in B(X,Z)$,且有 $\|TS\| \leqslant \|T\| \|S\|$.

6. 设 X 为赋范线性空间,$T \in B(X)$ 且 $\|T\| < 1$,定义 $T^n = \underbrace{T \cdot T \cdots T}_{n个}(n = 1,2,\cdots)$,证明算子列 $\{T^n\}$ 按范数收敛于零算子.

7. 定义 $T_n: l^2 \to l^2$ 如下

$$T_n x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots) \ (\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2),$$

此处 $n = 1,2,\cdots$.

证明(1) $T_n \in B(l^2)$ $(n = 1,2,\cdots)$;

(2) 算子列 $\{T_n\}$ 强收敛于恒等算子 I,但不是按范数收敛于 I.

8. 设 X,Y 为赋范线性空间,$\dim X < +\infty$,如果 $T \in B(X,Y)$,证明 $T \in C(X,Y)$.

9. 设 X,Y 为赋范线性空间，$T\in B(X,Y)$，证明 T 为紧算子的充要条件是对 X 中任一有界点列 $\{x_n\}$，$\{Tx_n\}$ 总存在收敛子列.

10. 设 X，Y 为赋范线性空间，且 Y 是无限维的，证明：如果 $T\in C(X,Y)$，则 T 肯定没有定义在 Y 上的有界逆线性算子.

11. 设 X,Y 为赋范线性空间，$T\in B(X,Y)$，证明：若 M 为 X 中的列紧集，则 $T(M)$ 为 Y 中的列紧集.

12. 设算子列 $\{S_n\}$，$\{T_n\}\subset B(X)$，$S,T\in B(X)$，且 $S_n\to S$，$T_n\to T$. 证明(1) $S_n+T_n\to S+T$；(2) $S_nT_n\to ST$；(3) $S_n^2\to S^2$.

§3　有界线性泛函

本节主要介绍赋范线性空间上的有界线性泛函的基本性质，共轭空间的概念以及某些具体空间上的有界线性泛函的表示形式.

§3.1　有界线性泛函与共轭空间

定义 3.1　设 X 为数域 $\boldsymbol{K}$ 上的赋范线性空间，$f:X\to\boldsymbol{K}$ 为线性泛函，如存在常数 $K>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant K\|x\|\quad(\forall x\in X)\tag{3.19}$$

成立，则称 f 为(X 上的)**有界线性泛函**.

注：这里定义的"有界性"与微积分中有界函数的概念不同. 例如在微积分中，$f(x)=x\ (x\in(-\infty,+\infty))$ 是无界函数，但作为一个线性泛函，显然有 $|f(x)|\leqslant\|x\|=|x|\ (\forall x\in\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}$ 中范数为 $\|x\|=|x|)$，故 f 是 $\boldsymbol{R}$ 上的有界线性泛函.

由于有界线性泛函是一种特殊的有界线性算子，由 §2 定理 2.2，定理 2.3 即知下面的定理成立.

定理 3.1　设 X 为数域 $\boldsymbol{K}$ 上的赋范线性空间，$f:X\to\boldsymbol{K}$ 为线性泛函，则下述条件等价：

(1) f 是连续线性泛函；

(2) f 在 X 中某一点 x_0 处连续；

(3) f 是有界线性泛函.

对于有界线性泛函,更进一步地有定理 3.2.

定理 3.2 设 X 为赋范线性空间,f 为 X 上的线性泛函,则 f 是有界线性泛函当且仅当零空间 $N(f)=\{x\in X\mid f(x)=0\}$ 为 X 中的闭集.

证 必要性 设 $x\in\overline{N(f)}$,则存在点列 $\{x_n\}\subset N(f)$,使 $x_n\to x$. 由于 f 连续,故 $f(x_n)\to f(x)$,因 $f(x_n)=0\ (n=1,2,\cdots)$,所以 $f(x)=0$,即 $x\in N(f)$,故 $N(f)$ 为闭集.

充分性 用反证法,设 f 不是有界线性泛函,由定义 3.1 知,对 $\forall n\in\mathbf{N}$,存在 $x_n\in X\ (x_n\neq\theta)$,使 $|f(x_n)|>n\|x_n\|\ (n=1,2,\cdots)$.

令 $y_n=\dfrac{x_n}{\|x_n\|}$,则 $\|y_n\|=1$,且有

$$|f(y_n)|=\frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|}>n,\text{从而}\frac{y_n}{f(y_n)}\to\theta.$$

另一方面,由 $f\left(\dfrac{y_n}{f(y_n)}-\dfrac{y_1}{f(y_1)}\right)=f\left(\dfrac{y_n}{f(y_n)}\right)-f\left(\dfrac{y_1}{f(y_1)}\right)=0$

知 $\dfrac{y_n}{f(y_n)}-\dfrac{y_1}{f(y_1)}\in N(f)\ (n=1,2,\cdots)$. 因 $\dfrac{y_n}{f(y_n)}-\dfrac{y_1}{f(y_1)}\to-\dfrac{y_1}{f(y_1)}$, $f\left(-\dfrac{y_1}{f(y_1)}\right)=-1\neq0$, 即 $-\dfrac{y_1}{f(y_1)}\notin N(f)$, 这与 $N(f)$ 是闭集相矛盾,因此 f 是有界线性泛函.

注: 对于线性算子,定理 3.2 中的充分性不成立. 例如对本章例 2.7 中的微分算子 T,可证 $N(T)$ 为闭集,但 T 是无界线性算子.

对于有界线性泛函,由本章定理 2.4,有如下定理.

定理 3.3 设 $f: X \to \boldsymbol{K}$ 为有界线性泛函,则

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq\theta}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leqslant 1}} |f(x)| \\ &= \inf\{K>0 \mid |f(x)| \leqslant K\|x\|, \forall x\in X\}. \quad (3.20)\end{aligned}$$

定义 3.2 设 X 为数域 $\boldsymbol{K}$ 上的赋范线性空间,X 上的所有有界线性泛函构成的集合记为 X^*,即 $X^* = B(X, \boldsymbol{K})$,称 X^* 为 X 的**共轭空间(对偶空间)**.

因 $\boldsymbol{K}$ 本身是 Banach 空间,由本章定理 2.6,得定理 3.4.

定理 3.4 赋范线性空间 X 的共轭空间 X^* 是 Banach 空间.

下面举几个有界线性泛函的例子.

例 3.1 对于欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$,定义 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ 为 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$($\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$),其中 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \boldsymbol{R}^n$ 为任一固定元素,证明 $f \in (\boldsymbol{R}^n)^*$,并求 $\|f\|$.

证 易知 f 是线性泛函.对 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$,由 Hölder 不等式,得

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \|a\|_2 \|x\|_2,$$

故 f 是有界线性泛函,且 $\|f\| \leqslant \|a\|_2$.

当 $a = \theta$ 时,$\|f\| = 0$,即 f 为零泛函.

设 $a \neq \theta$,因为 $|f(a)| = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \|a\|_2^2$,所以有 $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x\in \boldsymbol{R}^n\\ x\neq\theta}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{|f(a)|}{\|a\|_2} = \|a\|_2$,又前面已得 $\|f\| \leqslant \|a\|_2$,故 $\|f\| = \|a\|_2$.

例 3.2 已知 $C[a,b]$ 按 $\|x\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|$ 成为 Banach

空间，定义 $f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t(\forall x(t)\in C[a,b])$，证明 f 是 $C[a,b]$ 上有界线性泛函，并求 $\|f\|$.

证 显然 f 是线性泛函. 对 $\forall x(t)\in C[a,b]$，由于

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|x(t)|\mathrm{d}t\\&\leqslant(b-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\\&=(b-a)\|x\|,\end{aligned}$$

所以 f 为有界线性泛函，且 $\|f\|\leqslant b-a$.

取 $x_0(t)\equiv 1$，则 $\|x_0\|=1, f(x_0)=b-a$，

故 $\|f\|=\sup\limits_{\substack{x\in C[a,b]\\\|x\|=1}}|f(x)|\geqslant|f(x_0)|=b-a$，从而 $\|f\|=b-a$.

例 3.3 设 $u_0(t)\in C[a,b]$，对 $\forall x(t)\in C[a,b]$，定义 $f(x)=\int_a^b x(t)u_0(t)\mathrm{d}t$，则 f 是 $C[a,b]$ 上一个有界线性泛函.

证 由定积分的性质知 f 是线性泛函.

对 $\forall x(t)\in C[a,b]$，有

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|\int_a^b x(t)u_0(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_a^b|x(t)||u_0(t)|\mathrm{d}t\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\int_a^b|u_0(t)|\mathrm{d}t\\&=\left(\int_a^b|u_0(t)|\mathrm{d}t\right)\|x\|,\end{aligned}$$

可见 f 是 $C[a,b]$ 上有界线性泛函，且 $\|f\|\leqslant\int_a^b|u_0(t)|\mathrm{d}t$.

§3.2 某些具体空间上有界线性泛函的表示

由定理 3.4 知，任何赋范线性空间 X 的共轭空间 X^* 是

Banach 空间(不论 X 是否为 Banach 空间). 下面将介绍一些具体空间(如 $\boldsymbol{R}^n$, l^1, l^p 等)的共轭空间中元素的特征,即有界线性泛函的一般形式以及共轭空间的表示等问题,为此,先给出下述定义.

定义 3.3 设 X, Y 为两个赋范线性空间,如果映射 $T: X \to Y$ 满足条件: $\| Tx \| = \| x \|$ $(\forall x \in X)$,则称 T 是 X 到 Y 的一个**保范算子**. 如果 T 是保范的线性算子,并且是 X 到 Y 上的一一对应(即双射),则称 T 是 X 到 Y 上的**同构映射**. 如果存在一个 X 到 Y 上的同构映射,则称 X 与 Y **同构**,记作 $X = Y$.

如果 $T: X \to Y$ 是一个同构映射,从数学结构的观点来看,常将 $x \in X$ 与 $Tx \in Y$ 同一化(即把 x 与 Tx 视为同一的),把 X 与 Y 同一化,彼此不加区别. 将两个同构的空间同一化,这是泛函分析中的一个基本观点. 一般地说,一个抽象的赋范线性空间,如能与一个具体的赋范线性空间同构,我们就把这个具体空间称为抽象空间的一个表示.

设 X 为赋范线性空间,任给 $f \in X^*$,如何求出 f 的表示形式呢?

对于这一问题,通常的研究方法是:

第一步　在 X 中选取适当的子集 E,使得 $X = \overline{\mathrm{span} E}$(即 E 中元素的线性组合在 X 中稠密);

第二步　求出 f 在 E 上的表示形式;

第三步　利用 f 的线性性、连续性以及 $\mathrm{span} E$ 在 X 中的稠密性,求出 f 在 X 上的表示形式.

例 3.4 证明:欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的共轭空间是 $\boldsymbol{R}^n$,即 $(\boldsymbol{R}^n)^* = \boldsymbol{R}^n$(同构意义下).

证 取 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个基为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$,其中 $e_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$,即第 i 个分量为 1,其余的分量为 0 $(i = 1, 2, \cdots, n)$,则对 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$,有 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

对 $\forall f \in (\boldsymbol{R}^n)^*$,由于 f 是线性的,故有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i, \tag{3.21}$$

其中 $a_i=f(e_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$. 这表明 $\boldsymbol{R}^n$ 上任一有界线性泛函都具有(3.21)的形式.

另一方面,由例3.1知,凡具有(3.21)形式的泛函都是有界线性泛函,且 $\|f\|=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}$.

作映射 $T:(\boldsymbol{R}^n)^*\to\boldsymbol{R}^n$ 如下

$$Tf=(f(e_1),f(e_2),\cdots,f(e_n))\quad(\forall f\in(\boldsymbol{R}^n)^*),$$

则容易证明 T 是 $(\boldsymbol{R}^n)^*$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 上的同构映射,故 $(\boldsymbol{R}^n)^*=\boldsymbol{R}^n$.

例3.5 证明:l^1 的共轭空间是 l^∞,即 $(l^1)^*=l^\infty$(同构意义下).

证 取 $E=\{e_i\}\subset l^1$,此处 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$,即第 i 个分量为1,,其余分量为0($i=1,2,\cdots$),则对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^1$,有 $x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$(即 $\overline{\operatorname{span}E}=l^1$).

对任一 $f\in(l^1)^*$,由于 f 是线性、连续的,故

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(e_i)x_i\\&=\sum_{i=1}^{\infty}f(e_i)x_i.\end{aligned}\tag{3.22}$$

令 $a_i=f(e_i)$,则 $|a_i|=|f(e_i)|\leqslant\|f\|\,\|e_i\|_1=\|f\|$,从而 $\sup_i|a_i|\leqslant\|f\|$,记 $a=(a_1,a_2,\cdots)$,则 $a\in l^\infty$,且 $\|a\|_\infty\leqslant\|f\|$.(3.22)式可写为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\quad(\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^1), \tag{3.23}$$

这表明 l^1 上的任一有界线性泛函都具有(3.23)的形式. 由

$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_i||x_i| \leqslant \|a\|_\infty \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|a\|_\infty \|x\|_1$，知 $\|f\| \leqslant \|a\|_\infty$，从而 $\|f\| = \|a\|_\infty$.

另一方面，对于每一个 $a = (a_1, a_2, \cdots) \in l^\infty$，可通过(3.23)式定义 l^1 上的一个线性泛函 f，由前述推证可知这样的线性泛函 $f \in (l^1)^*$，且 $\|f\| = \|a\|_\infty$（作为练习）. 因此(3.23)式给出了 l^1 上有界线性泛函的一般形式.

作映射 $T:(l^1)^* \to l^\infty$ 如下

$$Tf = (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n), \cdots) \ (\forall f \in (l^1)^*),$$

则 T 是从 $(l^1)^*$ 到 l^∞ 上的保范的线性算子且为一一对应，即 T 是 $(l^1)^*$ 到 l^∞ 上的同构映射，故 $(l^1)^* = l^\infty$.

例 3.6 设 $1 < p < +\infty$，q 是 p 的共轭数，即满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ (1 < q < +\infty)$，证明：$l^p$ 的共轭空间是 l^q，即 $(l^p)^* = l^q$（同构意义下）.

证 E 的取法与例 3.5 相同. $\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p$，有 $x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. 对 $\forall f \in (l^p)^*$，记 $a_i = f(e_i)\ (i = 1, 2, \cdots)$，由 f 的连续性及线性性，得

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(e_i) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i. \end{aligned} \tag{3.24}$$

下面先证明 $a = (a_1, a_2, \cdots) \in l^q$，即证明 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|^q < +\infty$.

作点列 $y^{(n)} = (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \cdots)$ 如下 $(n = 1, 2, \cdots)$：

$$y_i^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{|a_i|^q}{a_i}, & 若\ i \leqslant n \quad 且\ a_i \neq 0; \\ 0, & 若\ i > n \quad 或\ a_i = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

因 $y^{(n)}$ 中只有 n 个分量可能不为0，故 $y^{(n)} \in l^p (n = 1,2,\cdots)$，且有 $f(y^{(n)}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^q$.

由(3.25)式及 $(q-1)p = q$，还有

$$f(y^{(n)}) \leqslant \|f\| \|y^{(n)}\|_p = \|f\| \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i^{(n)}|^p\Big)^{1/p} =$$

$\|f\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{(q-1)p}\Big)^{1/p} = \|f\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\Big)^{1/p}$，从而得到下式

$$f(y^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^q \leqslant \|f\| \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\Big)^{1/p}，故$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\Big)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|，即\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\Big)^{1/q} \leqslant \|f\|，$$

此式对每一 n 都成立，令 $n \to \infty$，得

$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\| < +\infty$，即 $a \in l^q$，且 $\|a\|_q \leqslant \|f\|$.

由(3.24)式及 Hölder 不等式，得

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \Big|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_i||x_i| \\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q\Big)^{1/q} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{1/p} \\ &= \|a\|_q \|x\|_p (\forall x \in l^p), \end{aligned}$$

故 $\|f\| \leqslant \|a\|_q$. 综合前述，便得 $\|f\| = \|a\|_q$.

反之，对任一 $a = (a_1, a_2, \cdots) \in l^q$，容易验证由(3.24)式定义的 f 是 l^p 上有界线性泛函，即 $f \in (l^p)^*$，且 $\|f\| = \|a\|_q$. 因此(3.24)式给出了 l^p 上有界线性泛函的一般形式.

作映射 $T: (l^p)^* \to l^q$ 如下

$Tf = (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n), \cdots)\ (\forall f \in (l^p)^*)$，容易证明 T 是 $(l^p)^*$ 到 l^q 上的同构映射，故 $(l^p)^* = l^q$.

下面的例子给出了 $L^p[a,b]\ (1 < p < +\infty)$ 的共轭空间的

表示,由于其证明要用到Lebesgue积分知识,比较复杂,此处从略.

例 3.7 设 $1 < p < +\infty$, q 是 p 的共轭数,即满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(1 < q < +\infty)$, 则 $L^p[a,b]$ 的共轭空间是 $L^q[a,b]$, 即 $(L^p[a,b])^* = L^q[a,b]$ (同构意义下).

具体地说,对 $\forall f \in (L^p[a,b])^*$,存在 $y(t) \in L^q[a,b]$,使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \quad (\forall x(t) \in L^p[a,b]), \tag{3.26}$$

且 $\|f\| = \|y\|_q = \left(\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}$. 反之,对任一 $y(t) \in L^q[a,b]$,按(3.26)式定义了 $L^p[a,b]$ 上一个有界线性泛函 f,且 $\|f\| = \|y\|_q$. 因此(3.26)式给出了 $L^p[a,b]$上有界线性泛函的一般形式.

习　题　3.3

1. 固定 $t_0 \in [a,b]$,定义 $f(x) = x(t_0)$ $(\forall x(t) \in C[a,b])$,证明 $f \in (C[a,b])^*$,并求 $\|f\|$.

2. 设 λ,μ 为固定的数,定义 $f(x) = \lambda x(a) + \mu x(b)$ $(\forall x(t) \in C[a,b])$,证明 $f \in (C[a,b])^*$.

3. 在 (a,b) 中取定 n 个点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ $(t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$,定义 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x(t_i)$, 其中 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \boldsymbol{R}^n$ 为一固定元素. 证明 $f \in (C[a,b])^*$,且 $\|f\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

4. 定义 $f(x) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} x(t)\mathrm{d}t$ $(\forall x(t) \in C[a,b])$, 证明 $f \in (C[a,b])^*$,并求 $\|f\|$.

5. 定义 $f: C[-2,2] \to \boldsymbol{K}$ 为 $f(x) = \int_{-2}^{0} x(t)\mathrm{d}t - \int_0^2 x(t)\mathrm{d}t$ $(\forall x(t) \in C[-2,2])$,求证 $f \in (C[-2,2])^*$.

6. 定义 $f: l^\infty \to \boldsymbol{K}$ 为 $f(x) = x_{n_0}$ ($\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^\infty$),此处 n_0 为一固定自然数. 证明 $f \in (l^\infty)^*$,并求 $\|f\|$.

7. 设 X 为 n 维赋范线性空间,证明其共轭空间 X^* 也是 n 维的.

§4 泛函分析的几个基本定理简介

本节介绍赋范线性空间中的几个基本定理,即 Hahn-Banach 保范延拓定理、共鸣定理、Banach 逆算子定理与闭图象定理,这几个定理被视为泛函分析的最基本定理,它们在泛函分析这门学科的理论形成与发展过程中起着巨大的作用,同时这些定理在其他数学分支中都有重要的应用. 考虑到本书的读者主要是工科研究生,因此我们仅对这些定理作一个简要的介绍,而将某些定理的繁复证明略去了. 有兴趣的读者请参看书目[1]或[2].

一、Hahn-Banach 保范延拓定理及其重要推论

对于一般的赋范线性空间 $X(X \neq \{\theta\})$,一个自然的问题是:在 X 上是否一定存在非零的有界线性泛函呢?也就是说,X^* 是否会只有零元素构成呢?Hahn-Banach 保范延拓定理及其重要推论回答了这一问题.

定理 4.1(Hahn-Banach 保范延拓定理) 设 X 为赋范线性空间,M 是 X 的线性子空间,f 是 M 上的有界线性泛函,则 f 可以保持范数不变而延拓到整个空间 X 上,即存在 X 上的有界线性泛函 F,使得

(1) $F(x) = f(x)$ ($\forall x \in M$);

(2) $\|F\| = \|f\|_M$,这里 $\|f\|_M = \sup\limits_{\substack{x \in M \\ \|x\|=1}} |f(x)|$.

下面的例子说明保范延拓不一定是惟一的.

例 4.1 对于 $x = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$,定义 $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$,容易验证 $\boldsymbol{R}^2$ 按 $\|\cdot\|_1$ 成为赋范线性空间(也是 Banach 空

间).设 $M=\{(x_1,0)\mid \forall x_1\in \boldsymbol{R}\}$,显然 M 是$\boldsymbol{R}^2$ 的线性子空间,定义 $f:M\to \boldsymbol{R}$ 如下:

$$f((x_1,0))=2x_1(\forall (x_1,0)\in M),$$

易知 f 是M 上的有界线性泛函,且 $\|f\|_M=2$.

现对 $\forall \lambda\in \boldsymbol{R},|\lambda|\leqslant 2$,定义 $F:\boldsymbol{R}^2\to \boldsymbol{R}$ 为:

$$F((x_1,x_2))=2x_1+\lambda x_2(\forall (x_1,x_2)\in \boldsymbol{R}^2),$$

则有 $F((x_1,0))=2x_1=f((x_1,0))\ (\forall (x_1,0)\in M)$,故 F 是 f 的延拓.

又因为 $|F((x_1,x_2))|=|2x_1+\lambda x_2|\leqslant 2|x_1|+|\lambda||x_2|\leqslant 2(|x_1|+|x_2|)=2\|(x_1,x_2)\|_1$,故 $\|F\|\leqslant 2$.

另一方面,取 $x_0=(1,0)\in \boldsymbol{R}^2$,则 $\|x_0\|_1=1$,且 $F(x_0)=2$,从而 $\|F\|=\sup\limits_{\substack{x\in \boldsymbol{R}^2\\ \|x\|_1=1}}|F(x)|\geqslant F(x_0)=2$,因此 $\|F\|=2$,即 F 保持范数不变,故 F 是f 的保范延拓,由于满足$|\lambda|\leqslant 2$ 的实数 λ 有无穷多个,所以 f 的保范延拓不惟一.

下面给出定理 4.1 的几个重要推论.

推论 4.1 设 M 是赋范线性空间X 的线性子空间,$x_0\in X$,如果 x_0 到 M 的距离大于零,即 $d=d(x_0,M)\triangleq \inf\limits_{x\in M}\|x_0-x\|>0$,则必存在 $f\in X^*$,使得

(1) $f(x)=0\ (\forall x\in M)$;

(2) $f(x_0)=d$;

(3) $\|f\|=1$.

证 令 $M_0=\{\lambda x_0+x\mid \forall \lambda\in \boldsymbol{K},\forall x\in M\}$,显然 M_0 为 X 的线性子空间.作 $f_0:M_0\to \boldsymbol{K}$ 为

$$f_0(\lambda x_0+x)=\lambda d\ (\forall \lambda x_0+x\in M_0),$$

则 f_0 是定义在 M_0 上的线性泛函,且 $f_0(x_0)=d,f_0(x)=0$

$(\forall x \in M)$.

当 $\lambda \neq 0, x \in M$ 时,由于 $-\frac{x}{\lambda} \in M$,故

$|f_0(\lambda x_0+x)|=|\lambda|d=|\lambda|\inf_{x\in M}\|x_0-x\|\leqslant|\lambda|\left\|x_0-\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\right\|=$ $\|\lambda x_0+x\|$ $(\forall \lambda x_0+x \in M_0)$;而当 $\lambda=0$ 时,此式仍然成立,故 $\|f_0\|_{M_0}\leqslant 1$,即 f_0 为 M_0 上有界线性泛函.下面证明 $\|f_0\|_{M_0}=1$.

由 d 的定义及下确界性质知,对 $\forall n \in \mathbf{N}$,存在 $x_n \in M$,使得 $\|x_0-x_n\|<d+\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$,再由 $d=|f_0(x_0-x_n)|\leqslant\|f_0\|_{M_0}\|x_0-x_n\|<\|f_0\|_{M_0}\left(d+\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$,令 $n\to\infty$,得 $d\leqslant\|f_0\|_{M_0}d$,因 $d>0$,故 $\|f_0\|_{M_0}\geqslant 1$,由前述知 $\|f_0\|_{M_0}=1$.

根据定理 4.1,可将 f_0 保范延拓到全空间 X 上,即存在 $f\in X^*$,使得 $f(\lambda x_0+x)=f_0(\lambda x_0+x)=\lambda d$,且 $\|f\|=\|f_0\|_{M_0}=1$,显然这样的 f 即为所求的有界线性泛函.

推论 4.2 设 X 为赋范线性空间,$x_0\in X, x_0\neq\theta$,则必有 $f\in X^*$,使得

(1) $f(x_0)=\|x_0\|$;

(2) $\|f\|=1$.

证 只需将推论 4.1 中的 M 取为 $\{\theta\}$,这时 $d=\|x_0\|>0$,即得本推论.

由推论 4.2 可知,在非零的赋范线性空间 X 上,必有非零的有界线性泛函,这便回答了本段开头所提出的问题,即当 $X\neq\{\theta\}$ 时,则 $X^*\neq\{\theta\}$.

推论 4.3 设 X 为赋范线性空间，$x_0 \in X$，如对 $\forall f \in X^*$，恒有 $f(x_0) = 0$，则 $x_0 = \theta$.

证 反证法，由推论 4.2 可得.

推论 4.4 设 X 为赋范线性空间，则对任意 $x \in X$，都有 $\| x \| = \sup\limits_{\substack{f \in X^* \\ \| f \| = 1}} |f(x)|$.

证 对 $\forall f \in X^*$，$\| f \| = 1$，因 $|f(x)| \leqslant \| f \| \| x \| = \| x \|$，故 $\sup\limits_{\substack{f \in X^* \\ \| f \| = 1}} |f(x)| \leqslant \| x \|$.

另一方面，当 $x = \theta$ 时，推论显然成立. 下设 $x \neq \theta$，由推论 4.2 知，存在 $f_0 \in X^*$，使得 $f_0(x) = \| x \|$，$\| f_0 \| = 1$，故 $\| x \| = |f_0(x)| \leqslant \sup\limits_{\substack{f \in X^* \\ \| f \| = 1}} |f(x)|$，因此 $\| x \| = \sup\limits_{\substack{f \in X^* \\ \| f \| = 1}} |f(x)|$.

二、共鸣定理(一致有界性原理)

共鸣定理又称为一致有界性原理，它是在几个不同的数学领域中发现了同类的特殊定理后，由 Banach 与 Steinhaus 共同提出的一般定理，有着较为广泛的应用. 这里只介绍定理的主要内容，而将有关证明略去.

定理 4.2(共鸣定理) 设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范线性空间，$T_n \in B(X, Y)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 如果对每个 $x \in X$，数列 $\{\| T_n x \|\}$ 都有界，即 $\| T_n x \| \leqslant M_x$ $(n = 1, 2, \cdots)$，其中 M_x 是与 x 有关而与 n 无关的实数，则数列 $\{\| T_n \|\}$ 是有界的，即存在常数 $M > 0$，使得 $\| T_n \| \leqslant M$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

下面介绍另一个较常用的定理.

定理 4.3 (Banach-Steinhaus 定理) 设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范线性空间，$T_n \in B(X, Y)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 如果对每个 $x \in X$，点列 $\{T_n x\}$ 收敛，则必存在 $T \in B(X, Y)$，使得 $\{T_n\}$ 强收敛于 T.

证 对 $\forall x \in X$,定义 $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$,容易证明 T 是线性算子.因为$\{T_n x\}$收敛,故$\{\|T_n x\|\}$有界($\forall x \in X$),从而由共鸣定理知$\{\|T_n\|\}$有界.设 $\|T_n\| \leqslant M$ $(n = 1,2,\cdots)$,则对 $\forall x \in X$,有 $\|T_n x\| \leqslant M\|x\|$ $(n = 1,2,\cdots)$,故 $\|Tx\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|T_n x\| \leqslant M\|x\|$ $(\forall x \in X)$,即 T 是有界线性算子,由 T 的定义即知$\{T_n\}$强收敛于 T.

例 4.2 设 X 为 Banach 空间,Y 为赋范线性空间,$T, T_n \in B(X,Y)$ $(n = 1,2,\cdots)$,若$\{T_n\}$强收敛于 T,则$\{\|T_n\|\}$是有界集.

证 由假设,对 $\forall x \in X$,$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n x - Tx\| = 0$,故$\{\|T_n x\|\}$是有界集,由共鸣定理即知$\{\|T_n\|\}$是有界集.

例 4.3 设对任一 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^1$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 都收敛,证明 $a = (a_1, a_2, \cdots) \in l^\infty$.

证 对任一 $n \in \mathbf{N}$,定义 $f_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$($\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^1$),易证 $f_n \in (l^1)^*$,且 $\|f_n\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|$.因对 $\forall x \in l^1$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 都收敛,即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在,故$\{|f_n(x)|\}$是有界集,因 l^1 是 Banach 空间,由共鸣定理知$\{\|f_n\|\}$是有界集,因此 $\sup\limits_n |a_n| < +\infty$,即 $a = (a_1, a_2, \cdots) \in l^\infty$.

三、Banach 逆算子定理

设 X, Y 为赋范线性空间,$T: X \to Y$ 为线性算子,所谓逆算子即逆映射 $T^{-1}: Y \to X$.由第一章 §1 知 T 有逆算子当且仅当 T 是从 X 到 Y 上的一一对应(双射),此时也称 T 是可逆的.容易证明,当 T 为线性算子且可逆时,其逆算子 T^{-1} 也是线性算子.

我们现在要问的是：如果 $T \in B(X,Y)$ 且为双射，此时 T^{-1} 是从 Y 到 X 上的线性算子，那么 T^{-1} 是否有界呢？即 $T^{-1} \in B(Y,X)$ 吗？一般来说，即使 X 为 Banach 空间，T^{-1} 也不一定有界. 下面便是一个例子.

例 4.4 设 $X = C[a,b]$，$Y = \{y(t) \mid y(t) \in C^{(1)}[a,b], y(a) = 0\}$，此时 Y 按 X 中的范数 $\|y\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)|$ 成为赋范线性空间（$Y \subset X$）. 定义 $T: X \to Y$ 为

$$y(t) \triangleq Tx(t) = \int_a^t x(u)\mathrm{d}u \quad (\forall\, x(u) \in X),$$

则由定积分性质知 T 是从 Banach 空间 X 到赋范线性空间 Y 上的一一对应. 显然 $T \in B(X,Y)$，且其逆算子 $T^{-1}: Y \to X$ 为

$$x(t) \triangleq T^{-1}y(t) = y'(t) \quad (\forall\, y(t) \in Y),$$

类似于本章例 2.7，可证 T^{-1} 是无界线性算子.

然而，当 X,Y 都是 Banach 空间时，前述问题的答案是肯定的，这就是著名的 Banach 逆算子定理，为证明这个定理，在此直接引用所谓的开映射定理，作为引理.

引理 4.1（开映射定理） 设 X,Y 都是 Banach 空间，$T \in B(X,Y)$ 且为满射（即 $R(T) = Y$），则 T 是开映射（即 T 把 X 中的每个开集映为 Y 中的开集）.

定理 4.4 （Banach 逆算子定理） 设 X,Y 都是 Banach 空间，$T \in B(X,Y)$ 且是双射，则 $T^{-1} \in B(Y,X)$.

证 由条件知 T^{-1} 是从 Y 到 X 上的线性算子，下面证明 T^{-1} 是连续的. 由定理假设及引理 4.1 得知 T 是开映射，因此，对 X 中的每个开集 G，$T(G)$ 为 Y 中的开集，又因 $T^{-1}: Y \to X$ 是双射，故 G 的原象为 $(T^{-1})^{-1}(G) = T(G)$ 是 Y 中的开集，由第二章关于连续映射的判别定理知 T^{-1} 是连续的，再由本章定理 2.3 知 T^{-1} 是有界线性算子，即 $T^{-1} \in B(Y,X)$.

对于有限维线性空间而言，本章定理 1.6 表明定义在其上的

任意两个范数都等价. 作为 Banach 逆算子定理的一个应用,下面我们给出一般线性空间上两个范数等价的一个充分条件.

定理 4.5 设 X 为线性空间,$\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上两个范数,且 $(X,\|\cdot\|_1)$ 与 $(X,\|\cdot\|_2)$ 都成为 Banach 空间. 如果存在常数 $c>0$,使得 $\|x\|_2\leqslant c\|x\|_1(\forall x\in X)$,则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

证 定义恒等算子 $I:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$ 为 $Ix=x(\forall x\in X)$. 由假设知,对 $\forall x\in X$,有 $\|Ix\|_2=\|x\|_2\leqslant c\|x\|_1$,故 I 为有界线性算子,又因 I 为双射,由定理 4.4,$I^{-1}:(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$ 也是有界线性算子($I^{-1}x=x(\forall x\in X)$),即存在常数 $c_1>0$,使得 $\|I^{-1}x\|_1\leqslant c_1\|x\|_2$,也就是 $\|x\|_1\leqslant c_1\|x\|_2(\forall x\in X)$. 由本章定义 1.7 知 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

四、闭图象定理

为介绍闭图象定理,先引入积空间的概念.

设 X,Y 为赋范线性空间,在积集 $X\times Y=\{(x,y)\mid\forall x\in X,\forall y\in Y\}$ 上定义线性运算与范数如下:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2),$$
$$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y),$$
$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|,$$

则容易验证 $X\times Y$ 也成为赋范线性空间,称为 X 与 Y 的**积空间**. 此外,当 X,Y 都是 Banach 空间时,$X\times Y$ 也是 Banach 空间(作为练习).

定义 4.1 设 X,Y 为赋范线性空间,M 为 X 的线性子空间(M 按 X 中的范数也成为赋范线性空间),$T:M\to Y$ 为线性算子,称 $G_T=\{(x,Tx)\mid\forall x\in M\}$ 为 T 的**图象**. 不难验证 G_T 是 $X\times Y$ 的线性子空间.

如果 G_T 是 $X \times Y$ 中闭线性子空间,则称 T 为**闭线性算子**(简称**闭算子**).

下面先给出一个在应用中较为方便的关于闭算子的判别定理.

定理 4.6 设 X, Y 为赋范线性空间,M 为 X 的线性子空间,$T: M \to Y$ 为线性算子,则 T 是闭线性算子当且仅当对任意的点列 $\{x_n\} \subset M$,若 $x_n \to x \in X, Tx_n \to y \in Y$,则 $x \in M$ 且 $Tx = y$.

证 必要性 由假设知 G_T 是 $X \times Y$ 中的闭集,设 $\{x_n\} \subset M$,且 $x_n \to x \in X, Tx_n \to y \in Y$,由 $X \times Y$ 中的范数定义知 $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$,又因 $\{(x_n, Tx_n)\} \subset G_T$,$G_T$ 为闭集,故 $(x, y) \in G_T$,即 $x \in M$ 且 $Tx = y$.

充分性 只需证 G_T 为 $X \times Y$ 中的闭集.

设 $(x, y) \in \overline{G_T}$,则存在点列 $\{(x_n, Tx_n)\} \subset G_T$,使得 $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$,这里 $\{x_n\} \subset M$.由 $X \times Y$ 中的范数定义知 $x_n \to x$ 且 $Tx_n \to y$,由充分性假定,便有 $x \in M$ 且 $Tx = y$,故 $(x, y) = (x, Tx) \in G_T$,即 G_T 为闭集,因此 T 是闭线性算子.

定理 4.7 设 X, Y 为赋范线性空间,M 为 X 的闭线性子空间,$T: M \to Y$ 为有界线性算子,则 T 必为闭线性算子.

证 由定义 4.1,只需证 G_T 为 $X \times Y$ 中的闭集即可.对 $\forall (x, y) \in \overline{G_T}$,则存在 $\{(x_n, Tx_n)\} \subset G_T$,使得 $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$,从而 $x_n \to x$ 且 $Tx_n \to y$.因 $\{x_n\} \subset M$,而 M 为闭集,故由 $x_n \to x$ 知 $x \in M$,又因 T 为 M 上有界线性算子,从而连续,所以有 $Tx_n \to Tx$,再由赋范线性空间中的极限惟一性性质,得 $y = Tx$,因此 $(x, y) = (x, Tx) \in G_T$,即 G_T 为 $X \times Y$ 中闭集,故 T 为闭线性算子.

定理 4.7 表明,在赋范线性空间中,当有界线性算子 T 的定义

域是闭子空间时,T 必为闭线性算子. 特别地,当 $T \in B(X,Y)$ 时,T 为闭线性算子.

下面的例子说明,闭线性算子不一定是有界线性算子.

例 4.5 关于 X,Y 与 T 的假定同例 4.4,由例 4.4 知(微分算子)$T^{-1}:Y \to X$ 是无界线性算子,这里 $T^{-1}y(t) = y'(t)$ ($\forall y(t) \in Y$). 下面利用定理 4.6 证明 T^{-1} 是闭线性算子.

为方便起见,记 $T^{-1} = S$,则 $Sy(t) = y'(t)$ ($\forall y(t) \in Y$). 要证对 $\forall \{y_n(t)\} \subset Y$,若 $y_n \to y \in X$ 且 $Sy_n = y'_n \to x \in X$,则 $y \in Y$ 且 $Sy = y' = x$.

因为 X 中的函数列按范数收敛即为函数列在 $[a,b]$ 上的一致收敛,因此由 $y'_n \to x$ 得

$$\begin{aligned}\int_a^t x(u)\mathrm{d}u &= \int_a^t \lim_{n\to\infty} y'_n(u)\mathrm{d}u \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^t y'_n(u)\mathrm{d}u \\ &= \lim_{n\to\infty}[y_n(t) - y_n(a)] \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t)\ (\forall t \in [a,b]),\end{aligned}$$

由此即知 $y'(t) = x(t)$,$y(a) = 0$,从而 $y \in Y$,且 $Sy = y' = x$,故 S 为闭线性算子.

一个闭线性算子满足什么条件时能成为有界线性算子呢?闭图象定理即回答了这一问题.

定理 4.8(闭图象定理) 设 X,Y 都是 Banach 空间,M 为 X 中的闭线性子空间,若 $T:M \to Y$ 为闭线性算子,则 T 必为有界线性算子,即 $T \in B(M,Y)$.

证 由假设知积空间 $X \times Y$ 为 Banach 空间,G_T 为 $X \times Y$ 的闭线性子空间,从而 G_T 按 $X \times Y$ 中的范数也是 Banach 空间,此外,M 本身也是 Banach 空间.

现构造映射 $S:G_T \to M$ 如下:

$$S(x, Tx) = x\ (\forall x \in M),$$

显然 S 是线性算子，且对 $\forall x \in M$，有 $\| S(x, Tx) \| = \| x \| \leqslant \| (x, Tx) \|$，因此 S 是有界线性算子，即 $S \in B(G_T, M)$. 易知 S 是满射也是单射，即 S 为双射，这样由定理4.4知 S^{-1} 是有界线性算子，因而对 $\forall x \in M$，有 $\| (x, Tx) \| = \| S^{-1}x \| \leqslant \| S^{-1} \| \| x \|$，从而 $\| Tx \| \leqslant \| (x, Tx) \| \leqslant \| S^{-1} \| \| x \|$，这表明 T 是有界线性算子.

习　题　3.4

1. 设 X 为赋范线性空间，M 为 X 的线性子空间，$d = d(x_0, M) > 0$. 证明：存在 $f \in X^*$，使得(1) $f(x) = 0\ (\forall x \in M)$；(2) $f(x_0) = 1$；(3) $\| f \| = \dfrac{1}{d}$.

2. 设 X 为赋范线性空间，$x_0, y_0 \in X$，$x_0 \neq y_0$，证明存在 $f \in X^*$，使得 $\| f \| = 1$ 且 $f(x_0) \neq f(y_0)$.

3. 设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范线性空间，$\{T_n\} \subset B(X, Y)$ 且 $\sup\limits_n \| T_n \| = +\infty$. 证明存在 $x_0 \in X$，使得 $\sup\limits_n \| T_n x_0 \| = +\infty$.

4. 设 X 为赋范线性空间，点列 $\{x_n\} \subset X$，若对任一 $f \in X^*$，$\{f(x_n)\}$ 是有界集，证明 $\{\| x_n \|\}$ 是有界集.

5. 设 X, Y 都为 Banach 空间，$T \in B(X, Y)$. 证明：存在常数 $K > 0$ 使得对任意 $x \in X$ 有 $\| Tx \| \geqslant K \| x \|$ 当且仅当 $N(T) = \{\theta\}$ 且 $R(T)$ 为 Y 中的闭集.

6. 设 X, Y 为赋范线性空间，对任意的 $(x, y) \in X \times Y$，定义 $\| (x, y) \| = \max\{\| x \|, \| y \|\}$，证明 $X \times Y$ 按 $\| \cdot \|$ 是赋范线性空间.

7. 设 X, Y 为赋范线性空间，$T: X \to Y$ 为闭线性算子，如果 T 是双射，证明 $T^{-1}: Y \to X$ 也是闭线性算子.

8. 设 X, Y 为赋范线性空间，M 为 X 的线性子空间，$T: M \to Y$ 为闭线性算子，证明 $N(T)$ 是 X 的闭线性子空间.

§5　共轭空间与伴随算子

本节介绍赋范线性空间 X 的二次共轭空间 X^{**} 以及自反空间的概念,研究 X 与 X^{**} 之间的关系.此外,引入伴随算子的概念,介绍其基本性质.

§5.1　二次共轭空间与自反空间

设 X 是赋范线性空间,由本章定理 3.4 知 X^* 也是赋范线性空间,故 X^* 也有共轭空间,记之为 $X^{**}=(X^*)^*$,称为 X 的**二次共轭空间**.自然还有 X 的三次共轭空间 $X^{***}=(X^{**})^*$ 等等.由上节推论 4.2 知,当 $X\neq\{\theta\}$ 时,X^* 中一定有非零元素,从而 X^{**},X^{***} 等也都有非零元素,而且都是 Banach 空间(由本章定理 3.4).

下面研究 X 和 X^{**} 的关系.

定理5.1　设 X 为赋范线性空间,则 X 与 X^{**} 的一个线性子空间同构(这里同构的含义见定义 3.3).

证　对 $\forall x\in X$,作 X^* 上的一个泛函,记之为 x^{**},定义如下:

$$x^{**}(f)=f(x)\ (\forall f\in X^*).\tag{3.27}$$

显然,对于 $\forall f,g\in X^*$ 及 $\forall\lambda,\mu\in\boldsymbol{K}$,有

$$\begin{aligned}x^{**}(\lambda f+\mu g)&=(\lambda f+\mu g)(x)=\lambda f(x)+\mu g(x)\\&=\lambda x^{**}(f)+\mu x^{**}(g),\end{aligned}$$

因此 x^{**} 是 X^* 上的线性泛函.

由于 $|x^{**}(f)|=|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|\ (\forall f\in X^*)$,所以 x^{**} 是 X^* 上的有界线性泛函,且 $\|x^{**}\|\leqslant\|x\|$,因此由(3.27)式定义的 $x^{**}\in X^{**}$.

作映射 $J:X\to X^{**}$ 为

$$Jx = x^{**} \ (\forall x \in X), \tag{3.28}$$

则容易证明 J 是线性算子,下面证明 J 是保范算子.

对 $\forall x \in X, x \neq \theta$,由 Hahn-Banach 保范延拓定理的推论 4.2,存在 $f \in X^*$,使得 $f(x) = \|x\|$ 且 $\|f\| = 1$,故 $\|x\| = |f(x)| = |x^{**}(f)| \leqslant \|x^{**}\| \|f\| = \|x^{**}\|$,即 $\|x\| \leqslant \|Jx\|$,又当 $x = \theta$ 时,此式也成立,所以,对 $\forall x \in X$,有 $\|x\| \leqslant \|Jx\|$,又因已有 $\|Jx\| = \|x^{**}\| \leqslant \|x\| \ (\forall x \in X)$,故 $\|Jx\| = \|x\| \ (\forall x \in X)$,因此 J 是保范算子,且 J 是单射.

以 $J(X)$ 表示 X 在映射J 下的象(即值域 $R(J)$),则 $J(X)$ 为 X^{**} 的一个线性子空间.由前述即知 J 是 X 到$J(X)$ 上的同构映射,也就是说 X 与$J(X)$ 同构.

注:映射 J 称为 X 到 X^{**} 中的自然映射或嵌入算子,它把 X 嵌入到 X^{**} 中,在同构的意义下,X 可看成 X^{**} 的一个线性子空间.

一般说来,$J(X) \subset X^{**}$,二者不一定相等.

定义 5.1 设 X 为赋范线性空间,若 $J(X) = X^{**}$,即 $X = X^{**}$(在自然映射下),则称 X 是**自反空间**.

由定义 5.1,容易证明下面的定理.

定理 5.2 若 X 是自反空间,则 X 是 Banach 空间.

例 5.1 欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是自反空间.

例 5.2 当 $1 < p < +\infty$ 时,$l^p, L^p[a,b]$ 都是自反空间.

自反空间具有良好的性质,它包含了较广的一类抽象空间,如下一章介绍的 Hilbert 空间也是自反空间.值得指出的是,定理 5.2 的逆命题不成立,即 Banach 空间不一定都是自反空间,例如 Banach 空间 $l^1, L[a,b]$ 都不是自反空间.

§5.2 伴随算子及其性质

设 X, Y 为赋范线性空间,$T \in B(X, Y)$,下面引入 T 的伴随

算子的概念.

对于 $T \in B(X,Y)$,定义映射 $T^*: Y^* \to X^*$ 为

$$(T^* f)(x) = f(Tx)(\forall f \in Y^*, \forall x \in X). \quad (3.29)$$

由于对每一个 $f \in Y^*$,由(3.29)式定义的 $T^* f$ 是X上的有界线性泛函,即 $T^* f \in X^*$,因此映射 $T^*: Y^* \to X^*$ 有明确的定义.

定义 5.2 设 X, Y 为赋范线性空间,$T \in B(X,Y)$,称由(3.29)式定义的映射 $T^*: Y^* \to X^*$ 为 T 的**伴随算子**(或**共轭算子**).

例 5.3 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 为一实矩阵,T 是由 A 确定的从欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的有界线性算子,即 $Tx = Ax$ ($\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$),求 T^*.

解 由本章例 2.5,$T \in B(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$.

对 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$,有

$$Tx = Ax = \Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \cdots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j\Big)^T \in \boldsymbol{R}^m.$$

由本章例 3.4,有$(\boldsymbol{R}^m)^* = \boldsymbol{R}^m$,$(\boldsymbol{R}^n)^* = \boldsymbol{R}^n$(同构意义下),且对 $\forall f \in (\boldsymbol{R}^m)^*$,存在$(a_1, a_2, \cdots, a_m)^T \in \boldsymbol{R}^m$,使得

$$f(y) = \sum_{i=1}^m a_i y_i (\forall y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T \in \boldsymbol{R}^m), \quad (3.30)$$

从而 $f(Tx) = \sum_{i=1}^m a_i \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i a_{ij} x_j$

$$= \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^m a_i a_{ij}\Big) x_j.$$

由(3.29)式,即有$(T^* f)(x) = f(Tx) = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^m a_i a_{ij}\Big) x_j$,故 $T^* f = \Big(\sum_{i=1}^m a_i a_{i1}, \sum_{i=1}^m a_i a_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^m a_i a_{in}\Big)^T \in (\boldsymbol{R}^n)^* = \boldsymbol{R}^n$,即在

同构意义下，对 $\forall f=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^T\in(\boldsymbol{R}^m)^*=\boldsymbol{R}^m$，有

$$T^*f=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}.\tag{3.31}$$

(3.31) 式表明，$T^*:(\boldsymbol{R}^m)^*\to(\boldsymbol{R}^n)^*$ 可看成是由 A 的转置矩阵 A^T 所确定的映射(实际上是有界线性算子，即 $T^*\in B((\boldsymbol{R}^m)^*,(\boldsymbol{R}^n)^*)$).

矩阵在有限维赋范线性空间中起着重要作用，当空间的一个基选定以后，其上的有界线性算子便和矩阵之间存在对应关系(参见本章例 1.8 和例 2.6). 因此由本例可知，定义 5.2 是转置矩阵的概念在一般的无限维赋范线性空间中的推广.

下面介绍伴随算子的一些性质.

定理 5.3 设 X,Y 为赋范线性空间，$T\in B(X,Y)$，则 T 的伴随算子 $T^*\in B(Y^*,X^*)$，且 $\|T^*\|=\|T\|$.

证 先证 $T^*:Y^*\to X^*$ 为线性算子.

对 $\forall f,g\in Y^*$ 及 $\forall\lambda,\mu\in\boldsymbol{K}$，由(3.29) 式，有

$$\begin{aligned}(T^*(\lambda f+\mu g))(x)&=(\lambda f+\mu g)(Tx)=\lambda f(Tx)+\mu g(Tx)\\&=\lambda(T^*f)(x)+\mu(T^*g)(x)\\&=(\lambda T^*f+\mu T^*g)(x),\end{aligned}$$

由 $x\in X$ 的任意性知，$T^*(\lambda f+\mu g)=\lambda T^*f+\mu T^*g$，因此 T^* 是线性算子.

由(3.29) 式，$|(T^*f)(x)|=|f(Tx)|\leqslant\|f\|\,\|Tx\|\leqslant\|f\|\,\|T\|\,\|x\|$ $(\forall x\in X)$，故 $\|T^*f\|\leqslant\|T\|\,\|f\|$，此式对 $\forall f\in Y^*$ 成立，因此 $T^*\in B(Y^*,X^*)$，且 $\|T^*\|\leqslant\|T\|$.

另一方面，对 $\forall x\in X$，当 $Tx\neq\theta$，由 Hahn-Banach 保范延拓定理的推论 4.2，存在 $f\in Y^*$，使得 $f(Tx)=\|Tx\|$，$\|f\|=$

1,因此

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= |f(Tx)| = |(T^*f)(x)| \\ &\leqslant \|T^*f\|\|x\| \leqslant \|T^*\|\|f\|\|x\| \\ &= \|T^*\|\|x\|,\end{aligned}$$

而当 $Tx=\theta$ 时,此式也成立,故 $\|T\|\leqslant\|T^*\|$,从而 $\|T^*\|=\|T\|$.

定理 5.4 设 X,Y,Z 为赋范线性空间.

(1) 若 $T_1,T_2\in B(X,Y),\lambda,\mu\in\boldsymbol{K}$,则 $(\lambda T_1+\mu T_2)^*=\lambda T_1^*+\mu T_2^*$;

(2) 若 $T\in B(X,Y),S\in B(Y,Z)$,则 $(ST)^*=T^*S^*$;

(3) 若 $T\in B(X,Y)$,T^{-1} 存在且 $T^{-1}\in B(Y,X)$,则 $(T^*)^{-1}$ 存在,$(T^*)^{-1}\in B(X^*,Y^*)$,且 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

证 这里只证(1)和(2);(3)的证明略去.

(1) 对 $\forall f\in Y^*$,$\forall x\in X$ 及 $\forall\lambda,\mu\in\boldsymbol{K}$,有

$$\begin{aligned}((\lambda T_1+\mu T_2)^*f)(x) &= f((\lambda T_1+\mu T_2)x) \\ &= f(\lambda T_1x+\mu T_2x) \\ &= f(\lambda T_1x)+f(\mu T_2x) \\ &= \lambda f(T_1x)+\mu f(T_2x) \\ &= \lambda(T_1^*f)(x)+\mu(T_2^*f)(x) \\ &= (\lambda T_1^*f+\mu T_2^*f)(x),\end{aligned}$$

故 $(\lambda T_1+\mu T_2)^*f=\lambda T_1^*f+\mu T_2^*f=(\lambda T_1^*+\mu T_2^*)f$,从而

$$(\lambda T_1+\mu T_2)^*=\lambda T_1^*+\mu T_2^*.$$

(2) 由假设知 $ST\in B(X,Z)$.对 $\forall g\in Z^*$,$\forall x\in X$,有

$$\begin{aligned}((ST)^*g)(x) &= g(STx) = (S^*g)(Tx) \\ &= (T^*(S^*g))(x) = ((T^*S^*)g)(x),\end{aligned}$$

故 $(ST)^*g=(T^*S^*)g(\forall g\in Z^*)$,从而 $(ST)^*=T^*S^*$.

例 5.4 设 $1\leqslant p<+\infty$,定义 $T:l^p\to l^p$ 为

$T(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) = (0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ $(\forall x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) \in l^p)$.

(1) 证明 $T \in B(l^p)$，且 $\|T\| = 1$；

(2) 求 T^*.

证 (1) 容易验证 $T \in B(l^p)$，且 $\|T\| = 1$.

(2) 由本章例 3.5 和例 3.6，$(l^1)^* = l^\infty$，$(l^p)^* = l^q$，此处 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(1 < q < +\infty)$. 约定 $p = 1$ 时，$q = \infty$.

对 $\forall f \in (l^p)^*$，由 l^p 上有界线性泛函的表示形式知，存在 $y = (y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots) \in l^q$，使得对 $\forall x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) \in l^p$，有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i .$$

因此

$$(T^* f)(x) = f(Tx) = f((0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)) = \sum_{i=1}^{\infty} y_{i+1} x_i ,$$

故 $T^* f \in (l^p)^*$，且可看成由 l^q 中的元素 $(y_2,y_3,\cdots,y_n,\cdots)$ 所确定的有界线性泛函. 因此，在同构的意义下，若记 $f = (y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots) \in (l^p)^* = l^q$，则

$$T^* f = (y_2,y_3,\cdots,y_n,\cdots) \in (l^p)^* = l^q .$$

习 题 3.5

1. 设 X 为无限维赋范线性空间，证明 X^* 也是无限维赋范线性空间.

2. 设 X，Y 为赋范线性空间，$0: X \to Y$ 为零算子，$I: X \to X$ 为恒等算子，求 0^*，I^*.

3. 设 X 为赋范线性空间，$T \in B(X)$，证明 $(T^n)^* = (T^*)^n$，其中 $n \in \boldsymbol{N}$.

4. 设 $1 \leqslant p < +\infty$，定义 $T: l^p \to l^p$ 为 $Tx = (0,0,x_1,x_2,\cdots)$ ($\forall x = (x_1,x_2,\cdots) \in l^p$)，证明 $T \in B(l^p)$，并求 T^*.

5. 设 X 为有限维赋范线性空间，证明 X 是自反空间.

§6 弱收敛与弱*收敛

在本章 §2 中，对于赋范线性空间上的有界线性算子序列，介绍了"一致收敛"与"强收敛"的概念. 本节介绍赋范线性空间中的点列与有界线性泛函序列的不同的收敛概念，以及这些收敛性之间的关系和某些性质.

§6.1 点列的强收敛与弱收敛

定义 6.1 设 X 为赋范线性空间，点列 $\{x_n\} \subset X$，如存在 $x \in X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$，则称 $\{x_n\}$ **强收敛**于 x，记作 $x_n \xrightarrow{S} x$，此时称 x 为 $\{x_n\}$ 的强极限.

关于点列 $\{x_n\}$ 强收敛的性质参见本章 §1 中的有关定理.

定义 6.2 设 X 为赋范线性空间，点列 $\{x_n\} \subset X$，如存在 $x \in X$，使得对任一 $f \in X^*$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \tag{3.32}$$

则称 $\{x_n\}$ **弱收敛**于 x，记作 $x_n \xrightarrow{W} x$，此时称 x 为 $\{x_n\}$ 的弱极限.

定理 6.1 设 X 为赋范线性空间，点列 $\{x_n\} \subset X$，$x \in X$，若 $x_n \xrightarrow{S} x$，则 $x_n \xrightarrow{W} x$.

证 对 $\forall f \in X^*$，由 $|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leqslant \|f\| \|x_n - x\|$ 及 $\|x_n - x\| \to 0$，知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$，故当 $x_n \xrightarrow{S} x$ 时，有 $x_n \xrightarrow{W} x$.

下面的例子说明，弱收敛的点列未必是强收敛的.

例6.1 在l^2中，取$e_n = (\underbrace{0,0,\cdots,0,1}_{n个},0,\cdots)\ (n = 1,2,\cdots)$，则点列$\{e_n\}$弱收敛于$\theta$，但$\{e_n\}$不是强收敛的.

证 设f为l^2上任一有界线性泛函，由本章例3.6知，存在$a = (a_1,a_2,\cdots) \in l^2$，使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \quad (\forall\, x = (x_1,x_2,\cdots) \in l^2),$$

故 $f(e_n) = a_n (n = 1,2,\cdots)$，因为$a \in l^2$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty} f(e_n) = 0 = f(\theta)$，由定义，$e_n \xrightarrow{W} \theta$.

另一方面，对$\forall\, m,n,m \neq n$，由于$\| e_m - e_n \|_2 = \sqrt{2}$，故$\{e_n\}$不是Cauchy列，从而$\{e_n\}$按$l^2$中的范数不收敛于任何点，因此$\{e_n\}$不是强收敛的.

定理6.2 设X为有限维赋范线性空间，点列$\{x_n\} \subset X$，$x \in X$，若$x_n \xrightarrow{W} x$，则$x_n \xrightarrow{S} x$.

证 设$\dim X = m < +\infty$，$\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$为X的一个基，则有表示$x_n = a_1^{(n)} y_1 + a_2^{(n)} y_2 + \cdots + a_m^{(n)} y_m\ (n = 1,2,\cdots)$，$x = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_m y_m$.

对$1 \leqslant i \leqslant m$，定义$f_i : X \to \mathbf{K}$如下：

$$f_i(y) = b_i (\forall\, y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \in X),$$

容易证明$f_i \in X^* (i = 1,2,\cdots,m)$.

若$x_n \xrightarrow{W} x$，由定义应有$f_i(x_n) \to f_i(x)$，注意到$f_i(x_n) = a_i^{(n)}$，$f_i(x) = a_i$，故$a_i^{(n)} \to a_i (i = 1,2,\cdots,m)$.

由此，当$n \to \infty$时，有

$$\| x_n - x \| = \left\| \sum_{i=1}^{m} (a_i^{(n)} - a_i) y_i \right\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} |a_i^{(n)} - a_i| \, \|y_i\| \to 0,$$

即 $x_n \xrightarrow{S} x$.

由定理 6.1 与定理 6.2 知，在有限维赋范线性空间中，点列的强收敛与弱收敛是两个等价的概念.

关于点列的弱收敛具有以下性质.

定理 6.3 设 X 为赋范线性空间，$\{x_n\} \subset X$，

(1) 若 $x_n \xrightarrow{W} x$，$x_n \xrightarrow{W} y$，则 $x = y$(弱收敛的极限惟一性)；

(2) 若 $x_n \xrightarrow{W} x$，则数列 $\{\|x_n\|\}$ 为有界集.

证 (1) 设 $x_n \xrightarrow{W} x$，$x_n \xrightarrow{W} y$，由定义，对 $\forall f \in X^*$，有 $f(x_n) \to f(x)$ 且 $f(x_n) \to f(y)$，由数列的极限惟一性，必有 $f(x) = f(y)(\forall f \in X^*)$，即 $f(x-y) = 0(\forall f \in X^*)$. 由本章 Hahn-Banach 保范延拓定理的推论 4.3，$x - y = \theta$，即 $x = y$.

(2) 设 $x_n \xrightarrow{W} x$，则对 $\forall f \in X^*$，$f(x_n) \to f(x)$，因为收敛数列必有界，所以存在常数 $M_f > 0$，使得 $|f(x_n)| \leqslant M_f(n = 1, 2, \cdots)$，此处 M_f 仅与 f 有关而与 n 无关.

现对每一个 x_n，定义映射 $\hat{x}_n : X^* \to \boldsymbol{K}$ 为

$$\hat{x}_n(f) = f(x_n) \ (\forall f \in X^*), \tag{3.33}$$

容易验证 $\hat{x}_n$ 为 X^* 上的有界线性泛函，且由有界线性泛函的范数定义及本章推论 4.4，有

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_n\| &= \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| = 1}} |\hat{x}_n(f)| \\ &= \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| = 1}} |f(x_n)| = \|x_n\| \ (n = 1,2,\cdots), \end{aligned}$$

即 $\{\hat{x}_n\} \subset X^{**} = B(X^*, \boldsymbol{K})$，且有 $\|\hat{x}_n\| = \|x_n\| \ (n = 1,2,\cdots)$.

由前述知,对 $\forall f \in X^*$,$\{\hat{x}_n(f)\}$ 为有界数列,注意到 X^* 为 Banach 空间(定理 3.4),$\boldsymbol{K}$($\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$)本身是赋范线性空间,利用共鸣定理知 $\{\|\hat{x}_n\|\}$ 为有界集,即 $\{\|x_n\|\}$ 为有界集.

例 6.2 在 Banach 空间 $C[a,b]$ 中,设点列 $\{x_n(t)\} \subset C[a,b]$,$x_0(t) \in C[a,b]$,且 $x_n(t) \xrightarrow{W} x_0(t)$,证明

(1) $\{\|x_n\|\}$ 为有界集;

(2) $\{x_n(t)\}$ 作为函数列在区间$[a,b]$上处处收敛于 $x_0(t)$.

证 (1) 由定理 6.3(2) 直接得证.

(2) 任意取定 $t_0 \in [a,b]$,定义映射 $f: C[a,b] \to \boldsymbol{K}$ 为

$$f(x(t)) = x(t_0) \ (\forall x(t) \in C[a,b]),$$

易证 $f \in (C[a,b])^*$. 因为 $x_n(t) \xrightarrow{W} x_0(t)$,故 $f(x_n(t)) \to f(x_0(t))$,即 $x_n(t_0) \to x_0(t_0)$,由 t_0 的任意性知(2) 成立.

§6.2 泛函序列的强收敛与弱*收敛

定义 6.3 设 X 为赋范线性空间,$\{f_n\} \subset X^*$,如存在 $f \in X^*$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$,则称 $\{f_n\}$ **强收敛**于 f,记作 $f_n \xrightarrow{S} f$,此时称 f 为 $\{f_n\}$ 的强极限.

定义 6.4 设 X 为赋范线性空间,$\{f_n\} \subset X^*$,如存在 $f \in X^*$,使得对任一 $x \in X$,有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \tag{3.34}$$

则称 $\{f_n\}$ **弱*收敛**于 f,记作 $f_n \xrightarrow{W^*} f$,此时称 f 为 $\{f_n\}$ 的弱*极限.

定理 6.4 设 X 为赋范线性空间,$\{f_n\} \subset X^*$,若 $f_n \xrightarrow{S} f$,则 $f_n \xrightarrow{W^*} f$.

证 对 $\forall x \in X$,因为 $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\| \|x\|$,

且 $\|f_n - f\| \to 0$,故$f_n(x) \to f(x)$, 即 $f_n \xrightarrow{W^*} f$.

本定理的逆命题不成立,见下面的例子.

例 6.3 设 $X = l^p(1 < p < +\infty)$,由本章例 3.6,$X^* = (l^p)^* = l^q$,取 $f_n = e_n = (\underbrace{0,0,\cdots,0,1}_{n\uparrow},0,\cdots) \in l^q = X^*(n = 1,2,\cdots)$,证明 $f_n \xrightarrow{W^*} \theta$,但 $f_n \overset{S}{\not\to} \theta$.

证 由本章例 3.6,有

$$f_n(x) = x_n(\forall x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) \in l^p),$$

且 $\|f_n\| = \|e_n\|_q = 1\ (n = 1,2,\cdots)$.

因 $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) \in l^p$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < +\infty$,从而 $x_n \to 0$,由此知对 $\forall x \in l^p, f_n(x) = x_n \to 0$,故$\{f_n\}$弱*收敛于 l^p 上的零泛函,即 $f_n \xrightarrow{W^*} \theta$.

但是, 对 $\forall n \geqslant 1, \|f_n - \theta\| = \|f_n\| = 1 \not\to 0$, 故 $f_n \overset{S}{\not\to} \theta$.

下面再举一个弱*收敛的例子.

例 6.4 已知 $C[0,1]$ 按 $\|x\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$ 成为 Banach 空间,对 $\forall n \geqslant 1$,定义 $f_n: C[0,1] \to \boldsymbol{K}$ 为

$$f_n(x(t)) = x\left(\frac{1}{n}\right)\ (\forall x(t) \in C[0,1]),$$

定义 $f: C[0,1] \to \boldsymbol{K}$ 为$f(x(t)) = x(0)\ (\forall x(t) \in C[0,1])$,则$\{f_n\} \subset (C[0,1])^*, f \in (C[0,1])^*$ 且 $f_n \xrightarrow{W^*} f$.

证 由 f_n, f 的定义易知$f_n \in (C[0,1])^*, f \in (C[0,1])^*$,且 $\|f_n\| = 1\ (n = 1,2,\cdots), \|f\| = 1$.

对 $\forall x(t) \in C[0,1]$, 由于 $x(t)$ 在$[0,1]$ 上连续, 故

$x\left(\frac{1}{n}\right) \to x(0)$，即 $f_n(x(t)) \to f(x(t))$，由定义便知 $f_n \xrightarrow{W^*} f$.

定理 6.5 设 X 为 Banach 空间，$\{f_n\} \subset X^*$，$f \in X^*$，若 $f_n \xrightarrow{W^*} f$，则数列 $\{\|f_n\|\}$ 为有界集.

证 设 $f_n \xrightarrow{W^*} f$，则对 $\forall x \in X$，$f_n(x) \to f(x)$，从而数列 $\{f_n(x)\}$ 为有界集. 由于有界线性泛函是有界线性算子的特殊情形，利用共鸣定理即知 $\{\|f_n\|\}$ 是有界集.

定理 6.6 设 X 为 Banach 空间，$\{f_n\} \subset X^*$，$f \in X^*$，则 $f_n \xrightarrow{W^*} f$ 当且仅当(1) $\{\|f_n\|\}$ 为有界集；(2) 对 X 的某个稠密子集 G 中的每个元素 x，都有 $f_n(x) \to f(x)$.

证 必要性 由定理 6.5 及定义 6.4 显然成立.

充分性 由假设知 $\sup\limits_n \|f_n\| < +\infty$，记 $m = \sup\limits_n \|f_n\|$，$M = \max\{m, \|f\|\}$.

对 $\forall \varepsilon > 0$，因 $\overline{G} = X$，据第二章 §5 关于稠密子集的性质，对 $\forall x \in X$，存在 $y \in G$，使得 $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3M}$.

又因 $f_n(y) \to f(y)$，故存在 N，当 $n > N$ 时，$|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

因此，当 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\
&\quad + |f(y) - f(x)| \\
&\leqslant \|f_n\| \|x - y\| + |f_n(y) - f(y)| \\
&\quad + \|f\| \|x - y\| \\
&< M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

即对 $\forall x \in X, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,故 $f_n \xrightarrow{W^*} f$.

例6.5 设 X 为 Banach 空间,$\{x_n\} \subset X, x_0 \in X, \{f_n\} \subset X^*, f \in X^*$,若 $x_n \xrightarrow{S} x_0, f_n \xrightarrow{W^*} f$,证明 $f_n(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.

证 因 X 为Banach空间,$f_n \xrightarrow{W^*} f$,由定理6.5,$\{\|f_n\|\}$ 为有界集,设 $\|f_n\| \leqslant M\ (n = 1,2,\cdots)$.

由于$|f_n(x_n) - f(x_0)|$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant |f_n(x_n) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leqslant \|f_n\| \|x_n - x_0\| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leqslant M\|x_n - x_0\| + |f_n(x_0) - f(x_0)|,
\end{aligned}
$$

而由条件知 $\|x_n - x_0\| \to 0, f_n(x_0) \to f(x_0)$,故 $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

习　题　3.6

1. 设 X 为赋范线性空间,$\{x_n\} \subset X, x \in X$,且 $x_n \xrightarrow{W} x$,证明$\{x_n\}$的每一个子序列都弱收敛于 x.

2. 设 X, Y 为赋范线性空间,$T \in B(X,Y)$, $\{x_n\} \subset X, x \in X$,若 $x_n \xrightarrow{W} x$,证明 $Tx_n \xrightarrow{W} Tx$.

3. 设 X 为赋范线性空间,$\{f_n\} \subset X^*, f \in X^*$,且 $f_n \xrightarrow{W^*} f$,证明$\{f_n\}$的每一个子序列都弱*收敛于 f.

4. 设 X 为赋范线性空间,$\{f_n\} \subset X^*, f, g \in X^*$,若 $f_n \xrightarrow{W^*} f, f_n \xrightarrow{W^*} g$,则 $f = g$.

5. 设 X 为 Banach 空间,$\{f_n\} \subset X^*$,且对 $\forall x \in X, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在.定义 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)(\forall x \in X)$,证明 $f \in X^*$,且 $f_n \xrightarrow{W^*} f$.

6. 设 X 为有限维赋范线性空间,$\{f_n\} \subset X^*, f \in X^*$,证明 $f_n \xrightarrow{S} f$ 当

且仅当 $f_n \xrightarrow{W^*} f$.

7. 在 l^2 中,取 $e_n = (\underbrace{0,0,\cdots,0,1}_{n个},0,\cdots)\ (n = 1,2,\cdots)$,证明 $e_n \xrightarrow{W} \theta$ 但 $e_n \overset{S}{\nrightarrow} \theta$.

§7 有界线性算子谱理论初步

算子谱理论是现代泛函分析及其应用的一个主要分支,内容相当丰富,本节只能作一个简要的介绍,内容包括谱的概念及基本性质,关于紧算子的 Riesz-Schauder 理论简介.

§7.1 谱的概念及基本性质

这里先从有限维空间谈起,然后引入谱的概念.

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为复矩阵,在线性代数中常遇到形如

$$(\lambda I - A)x = b \tag{3.35}$$

的方程求解问题,这里 $\lambda \in \boldsymbol{C}$,$I$ 为 n 阶单位矩阵,$x \in \boldsymbol{C}^n$ 为未知向量,$b \in \boldsymbol{C}^n$ 为已知向量.

我们知道,方程(3.35)解的情况与 λ 取值有关.若 λ 使得行列式 $|\lambda I - A| \neq 0$ (这时矩阵 $\lambda I - A$ 可逆),则(3.35) 对任一 $b \in \boldsymbol{C}^n$ 都有惟一解 $x = (\lambda I - A)^{-1}b$;若 λ 使得行列式 $|\lambda I - A| = 0$,即 λ 是 A 的特征值,这时方程(3.35)并不是对所有的 $b \in \boldsymbol{C}^n$ 都有解,即使对某些 $b \in \boldsymbol{C}^n$,(3.35) 有解,其解也不一定惟一.

对于酉空间 $\boldsymbol{C}^n$ 而言,矩阵 A 和 $\lambda I - A$ 都可以看成从 $\boldsymbol{C}^n$ 到 $\boldsymbol{C}^n$ 的有界线性算子,上面的问题用泛函分析的语言来讲,就是对哪些数 λ,算子 $\lambda I - A$ 有逆算子存在(在有限维空间中,当 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在时,必为有界线性算子,即 $(\lambda I - A)^{-1} \in B(\boldsymbol{C}^n)$).因此,方程(3.35) 的求解问题与有界线性算子 $\lambda I - A$ 是否有逆算子密切相

关,这里牵涉到的问题本质上就是线性代数中矩阵的特征值理论.

现在对比方程(3.35),考虑赋范线性空间中一般的算子方程求解问题.

设 X 为复赋范线性空间,$T \in B(X)$,我们要研究形如

$$(\lambda I - T)x = y \tag{3.36}$$

的算子方程解的存在性、惟一性与稳定性问题(所谓稳定性是指有解时,解 x 对 y 的连续依赖性,即当 y"变化很小"时,解 x 是否也"变化很小"),其中 $\lambda \in \boldsymbol{C}$,$I$ 为 X 上恒等算子,$x, y \in X$.

记 $T_\lambda = \lambda I - T$,我们关心的是对哪些 λ,T_λ 有逆算子存在,T_λ^{-1} 是否还是有界线性算子,它具有什么性质,与原算子 T 的关系如何等等,这是算子谱理论中要讨论的主要问题,即算子 T 的谱分析问题.有大量的数学物理问题,如微分方程、积分方程乃至量子力学中的许多问题,都涉及到算子 T 的谱分析,算子谱理论在这些领域中有着重要的应用.

定义 7.1 设 X 为复赋范线性空间,$T \in B(X)$,λ 为一复数.

(1) 若 λ 使得算子 $\lambda I - T$ 为单射,逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}: R(\lambda I - T) \to X$ 为有界线性算子,且 $R(\lambda I - T)$ 在 X 中稠密,则称 λ 为 T 的**正则点(正则值)**,T 的正则点的全体称为 T 的**正则集(或预解集)**,记为 $\rho(T)$.当 $\lambda \in \rho(T)$ 时,记 $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$,称 R_λ 为 T 的**预解算子**.

(2) 如果 λ 不是 T 的正则点,则称 λ 是 T 的**谱点**,T 的谱点全体称为 T 的**谱**,记为 $\sigma(T)$.

显然,$\boldsymbol{C} = \rho(T) \cup \sigma(T)$,且 $\rho(T)$ 与 $\sigma(T)$ 互不相交.

由定义,当 λ 不是 T 的正则点时,即 $\lambda \in \sigma(T)$,那么下列三个条件中至少有一条不成立:(1) $\lambda I - T$ 为单射;(2) $(\lambda I - T)^{-1}$ 是有界线性算子;(3) $R(\lambda I - T)$ 在 X 中稠密.因此,为了深入地进行研究,一般还把谱 $\sigma(T)$ 分成以下三种类型.

定义 7.2 设 $\lambda \in \sigma(T)$,如果 λ 使得 $\lambda I - T$ 不是单射,即存

在 $x \in X, x \neq \theta$,满足方程

$$(\lambda I - T)x = \theta \quad 或 \quad Tx = \lambda x, \tag{3.37}$$

则称 λ 为 T 的**特征值**,x 为 T 的对应于λ 的特征向量,T 的特征值全体称为 T 的**点谱**,记为 $\sigma_p(T)$. 当 $\lambda \in \sigma_p(T)$ 时,称 $E_\lambda = N(\lambda I - T)$ 为 T 的对应于λ 的特征向量空间.

如果 λ 使得$\lambda I - T$ 为单射,且 $R(\lambda I - T)$ 在 X 中稠密,但 $(\lambda I - T)^{-1}$ 不是有界线性算子,则称 λ 为T 的**连续谱点**,T 的连续谱点全体称为 T 的**连续谱**,记为 $\sigma_c(T)$.

如果 λ 使得$\lambda I - T$ 为单射,但 $R(\lambda I - T)$ 在 X 中不稠密(此时不论$(\lambda I - T)^{-1}$ 是否为有界线性算子),则称 λ 为 T 的**剩余谱点**,T 的剩余谱点全体称为 T 的**剩余谱**,记为 $\sigma_r(T)$.

由定义,T 的谱$\sigma(T)$ 可表示成

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T), \tag{3.38}$$

且 $\sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)$ 两两互不相交.

例 7.1 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为一复矩阵,T 是由 A 所确定的从酉空间 $\boldsymbol{C}^n$ 到$\boldsymbol{C}^n$ 的线性算子(必有界),即 $Tx = Ax (\forall x \in \boldsymbol{C}^n)$,求 $\sigma(T), \rho(T)$.

解 设 A 的特征值全体为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$,其中相同者为重特征值.

I 表示 n 阶单位矩阵,也就是 $\boldsymbol{C}^n$ 上的恒等算子,则对 $\forall \lambda \in \boldsymbol{C}$, $\forall x \in \boldsymbol{C}^n$,$(\lambda I - T)x = (\lambda I - A)x$,即 $\lambda I - T = \lambda I - A$. 如果 λ 不是 A 的特征值,则矩阵 $\lambda I - A$ 可逆,故在有限维空间中,$(\lambda I - T)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}$ 必为 $\boldsymbol{C}^n$ 上的有界线性算子, 由定义知 $\lambda \in \rho(T)$.

如果λ 是A 的特征值,矩阵 $\lambda I - A$ 不可逆,这时$(\lambda I - T)x = (\lambda I - A)x = 0$ 有非零解, 即 $\lambda I - T$ 不是单射, 由定义知 $\lambda \in \sigma_p(T)$.

因此，$\sigma(T)=\sigma_p(T)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，即矩阵 A 的特征值全体，而 $\rho(T)=\boldsymbol{C}\setminus\sigma(T)=\{\lambda\in\boldsymbol{C}\mid\lambda\neq\lambda_i,i=1,2,\cdots,n\}$.

本例说明算子谱的概念是矩阵特征值概念的推广.

例 7.2 设 X 为有限维复赋范线性空间，$T\in B(X)$，证明 $\sigma(T)=\sigma_p(T)$，即 T 的谱中只有点谱，没有连续谱和剩余谱.

证 只需证明当 $\lambda\notin\sigma_p(T)$ 时，必有 $\lambda\in\rho(T)$ 即可.

设 $\dim X=n$，取定 X 的一个基为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，当 $\lambda\notin\sigma_p(T)$ 时，下证 $\{(\lambda I-T)e_1,(\lambda I-T)e_2,\cdots,(\lambda I-T)e_n\}$ 线性无关，从而 $R(\lambda I-T)=X$.

事实上，假定 $\{(\lambda I-T)e_1,(\lambda I-T)e_2,\cdots,(\lambda I-T)e_n\}$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\lambda I-T)e_i=\theta,\text{即}(\lambda I-T)\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\Big)=\theta,$$

由于 $\lambda\notin\sigma_p(T)$，故 $\lambda I-T$ 为单射，从而有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ie_i=\theta$，然而这与 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关相矛盾，因此 $R(\lambda I-T)=X$.

由上述证明可知，当 $\lambda\notin\sigma_p(T)$ 时，$(\lambda I-T)^{-1}$ 存在，且是从 X 到 X 上的线性算子，而有限维空间中的线性算子必有界，因此由定义 7.1 可知 $\lambda\in\rho(T)$.

本例表明在有限维空间中，算子的谱只能是点谱；但在无限维空间中，情况则要复杂得多，算子可以没有点谱，但有其他类型的谱，请看下面的例子.

例 7.3 求有界线性算子 $T:C[a,b]\to C[a,b]$：

$$Tx(t)=\int_a^t x(u)\mathrm{d}u\ \ (\forall\, x(t)\in C[a,b])$$

的点谱 $\sigma_p(T)$.

解 对 $\lambda\in\boldsymbol{C}$，讨论 $\lambda I-T$ 什么时候不是单射，即方程 $(\lambda I-T)x(t)=0$ 何时有非零解.

设$(\lambda I - T)x(t) = \lambda x(t) - Tx(t) = \lambda x(t) - \int_a^t x(u)\mathrm{d}u$
$= 0$,即$\int_a^t x(u)\mathrm{d}u = \lambda x(t)\ (\forall t \in [a,b])$.

将之化为微分方程定解问题

$$\begin{cases} x(t) = \lambda x'(t)\ (\forall t \in [a,b]), \\ \lambda x(a) = 0. \end{cases}$$

(1) 若 $\lambda = 0$, 显然 $x(t) \equiv 0$,故 $\lambda = 0 \notin \sigma_p(T)$.

(2) 若 $\lambda \neq 0$, 则有 $\begin{cases} x(t) = \lambda x'(t), \\ x(a) = 0, \end{cases}$ 求解一阶微分方程 $\lambda x'(t) = x(t)$ 得通解为 $x(t) = ce^{\frac{1}{\lambda}t}$,由条件 $x(a) = 0$ 得 $x(t) \equiv 0$,因此当 $\lambda \neq 0$ 时,$\lambda \notin \sigma_p(T)$.

综合(1),(2) 知 $\sigma_p(T) = \phi$.

例 7.4 定义 $T:C[a,b] \to C[a,b]$ 为

$$Tx(t) = tx(t)\ (\forall x(t) \in C[a,b]),$$

易知 $T \in B(C[a,b])$,求 $\sigma(T)$.

解 对 $\forall \lambda \in \mathbf{C}$,$(\lambda I - T)x(t) = (\lambda - t)x(t)\ (\forall x(t) \in C[a,b])$.

(1) 设 $\lambda \notin [a,b]$,易知 $\lambda I - T$ 为单射,且有

$$(\lambda I - T)^{-1}x(t) = \frac{1}{\lambda - t}x(t)\ (\forall x(t) \in C[a,b]),$$

容易验证$(\lambda I - T)^{-1} \in B(C[a,b])\ (R(\lambda I - T) = C[a,b])$,故当 $\lambda \notin [a,b]$ 时,$\lambda \in \rho(T)$.

(2) 设 $\lambda \in [a,b]$,利用 $x(t)$ 的连续性,易证若$(\lambda I - T)x(t) = (\lambda - t)x(t) = 0$,则必有 $x(t) \equiv 0$,故 $\lambda I - T$ 为单射,再由(1) 的结果知 $\sigma_p(T) = \phi$.

下面证明,当 $\lambda \in [a,b]$ 时,$\overline{R(\lambda I - T)} \neq C[a,b]$.

事实上,对 $y(t) \in C[a,b]$,如存在$\{x_n(t)\} \subset R(\lambda I - T) =$

$\{(\lambda - t)x(t) \mid \forall x(t) \in C[a,b]\}$，使得 $\|x_n(t) - y(t)\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t) - y(t)| \to 0$. 注意到 $x_n(\lambda) = 0(n = 1,2,\cdots)$，由 $|x_n(\lambda) - y(\lambda)| \leqslant \|x_n(t) - y(t)\| \to 0$，知 $y(\lambda) = 0$. 因此当 $y(t) \in C[a,b]$，$y(\lambda) \neq 0$ 时(这样的函数有许多)，必不存在 $\{x_n(t)\} \subset R(\lambda I - T)$，使得 $\|x_n(t) - y(t)\| \to 0$，所以 $\overline{R(\lambda I - T)} \neq C[a,b]$，由定义即知当 $\lambda \in [a,b]$ 时，$\lambda \in \sigma_r(T)$.

综合(1)，(2) 得知 $\sigma_p(T) = \sigma_c(T) = \phi$，$\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{\lambda \mid \lambda \in [a,b]\}$，$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \lambda \notin [a,b]\}$.

例 7.5 定义 $T: l^2 \to l^2$ 为

$Tx = (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ $(\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots) \in l^2)$，易知 $T \in B(l^2)$，且 $\|T\| = 1$. 求 $\sigma_p(T)$，并证明 $0 \in \sigma_r(T)$.

解 对 $\forall \lambda \in \mathbf{C}$，$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2$，有

$$(\lambda I - T)x = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \cdots, \lambda x_n - x_{n-1}, \cdots).$$

(1) 当 $\lambda = 0$ 时，显然 $0I - T = -T$ 是单射，故 $0 \notin \sigma_p(T)$.

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时，由 $(\lambda I - T)x = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \cdots, \lambda x_n - x_{n-1}, \cdots) = \theta$，得 $x_n = 0(n = 1,2,\cdots)$，即 $x = \theta$，故 $\lambda I - T$ 是单射，因此 $\lambda \notin \sigma_p(T)$.

由(1)，(2) 便知 $\sigma_p(T) = \phi$.

下证 $0 \in \sigma_r(T)$.

已知 $0I - T = -T$ 是单射，因为 $(1,0,0,\cdots,0,\cdots) \notin \overline{R(0I - T)} = \overline{R(-T)}$，故 $\overline{R(0I - T)} \neq l^2$，由定义便知 $0 \in \sigma_r(T)$.

一般来说，要求出一个具体算子的谱不是一件容易的事情，往往需要作深入的研究才能得到一些定性的结果.

下面介绍有界线性算子的正则集和谱的一些最基本的性质.

定理 7.1 设 X 为 Banach 空间，$T \in B(X)$，且 $\|T\| < 1$，

则$(I-T)^{-1}$存在,$(I-T)^{-1}\in B(X)$,并且有

$$(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n=I+T+T^2+\cdots+T^n+\cdots,\quad(3.39)$$

这里右边的级数按 $B(X)$ 中的算子范数收敛.

证 记 $S_n=I+T+\cdots+T^{n-1}(n=1,2,\cdots)$,则 $S_n\in B(X)$.因为 $\|T\|<1$,故 $\sum_{n=0}^{\infty}\|T\|^n$ 收敛,利用算子范数的三角不等式即知$\{S_n\}$为 $B(X)$ 中一个 Cauchy 列,又因 X 为 Banach 空间,由本章定理 2.6,$B(X)$ 也是 Banach 空间,因此$\{S_n\}$按 $B(X)$ 中的算子范数收敛,设 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$,则 $S\in B(X)$,亦即

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}T^n.$$

下证 $S=(I-T)^{-1}$.

因为$(I-T)(I+T+\cdots+T^{n-1})=(I+T+\cdots+T^{n-1})(I-T)=I-T^n$,即$(I-T)S_n=S_n(I-T)=I-T^n$,由于 $\|T\|<1$,故 $T^n\to 0$(零算子),在前式中令 $n\to\infty$,由本章 §2 习题 12 便知 $(I-T)S=S(I-T)=I$,此式表明 $I-T$ 为双射,即$(I-T)^{-1}$存在,且$(I-T)^{-1}=S\in B(X)$,(3.39) 式成立.

定理 7.2 设 X 为复 Banach 空间,$T\in B(X)$,$\lambda\in\boldsymbol{C}$,若 $|\lambda|>\|T\|$,则 $\lambda\in\rho(T)$.

证 当$|\lambda|>\|T\|$时,有$\dfrac{\|T\|}{|\lambda|}<1$,即$\left\|\dfrac{T}{\lambda}\right\|<1$,由定理 7.1,$\left(I-\dfrac{T}{\lambda}\right)^{-1}$ 存在,且 $\left(I-\dfrac{T}{\lambda}\right)^{-1}\in B(X)$.容易验证 $(\lambda I-T)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\left(I-\dfrac{T}{\lambda}\right)^{-1}$,故$(\lambda I-T)^{-1}\in B(X)$,由定义得知 $\lambda\in\rho(T)$.

定理 7.3 设 X 为复 Banach 空间,$T\in B(X)$,则 T 的正则集 $\rho(T)$ 是开集,从而谱 $\sigma(T)=\boldsymbol{C}\setminus\rho(T)$ 为闭集.

证 由定理 7.2, $\rho(T) \neq \phi$.

对 $\forall \lambda_0 \in \rho(T)$, 要证 λ_0 为 $\rho(T)$ 的内点, 即存在 λ_0 的一个邻域, 使得该邻域内的每一点都是 T 的正则点.

为推导之需, 我们不加证明地引用如下结论(参见书目[2]).

设 X 为复 Banach 空间, $T \in B(X)$, $\lambda \in \rho(T)$, 则 $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ 可以保持范数不变而延拓到整个空间 X 上, 且这种延拓是惟一的; 将延拓后的算子仍记为 R_λ, 则 $R_\lambda \in B(X)$, 且 $\| R_\lambda \| = \| (\lambda I - T)^{-1} \|$.

对 $\lambda \in \boldsymbol{C}$, 有

$$\begin{aligned} \lambda I - T &= \lambda_0 I - T + (\lambda - \lambda_0) I \\ &= (\lambda_0 I - T)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}], \end{aligned}$$

当 $|\lambda - \lambda_0| < \| (\lambda_0 I - T)^{-1} \|^{-1} = \| R_{\lambda_0} \|^{-1}$ 时, $\| (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1} \| < 1$, 由定理 7.1 知, 算子 $S = I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 的逆算子存在, 且 $S^{-1} \in B(X)$, 从而有 $(\lambda I - T)^{-1} = S^{-1}(\lambda_0 I - T)^{-1} = S^{-1} R_{\lambda_0} \in B(X)$, 由定义, $\lambda \in \rho(T)$, 因此 λ_0 为 $\rho(T)$ 的内点, 由 λ_0 的任意性, $\rho(T)$ 为开集, 从而谱 $\sigma(T) = \boldsymbol{C} \setminus \rho(T)$ 为闭集.

推论 7.1 设 X 为复 Banach 空间, $T \in B(X)$, 则谱 $\sigma(T)$ 是有界闭集.

定义 7.3 设 X 为复 Banach 空间, $T \in B(X)$, 称 $r(T) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ 为 T 的谱半径.

由定理 7.2 知, $r(T) \leqslant \| T \|$.

在数学物理和计算数学的一些问题中, 为了确定谱的范围, 常需要估计谱半径, 从应用上来讲, 上面提供的估计式是方便的.

利用解析函数理论, 可以证明下述定理(参见书目[2]):

定理 7.4 设 X 为复 Banach 空间, $X \neq \{\theta\}$, $T \in B(X)$, 则

(1) $\sigma(T) \neq \phi$;(2) $r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| T^n \|}$.

§7.2 Riesz-Schauder 理论简介

在本章 §2 中介绍了紧算子的概念及基本性质. 由例 7.2,有限维空间上的线性算子的谱只有点谱,即仅由特征值构成. 关于紧算子的谱已有完整的理论,紧算子的谱在许多方面与有限维空间上线性算子的谱相似,关于这方面的成果称为 Riesz-Schauder 理论,受篇幅所限,这里只能作个简要介绍,大部分证明则略去了,有兴趣的读者可参见书目[2]或[3].

定理 7.5 设 X, Y 为赋范线性空间, $T \in C(X,Y)$, 则 $T^* \in C(Y^*, X^*)$.

定理 7.6 (Riesz-Schauder 定理) 设 X 为复 Banach 空间, $T \in C(X)$, 即 T 为 X 上的紧算子,则

(1) 当 X 是无限维空间时, $0 \in \sigma(T)$;

(2) T 的非零谱点都是 T 的特征值;

(3) 设 $\lambda \neq 0, \lambda \in \sigma_p(T)$,则 T 的对应于 λ 的特征向量空间 $E_\lambda = N(\lambda I - T)$ 是有限维的;

(4) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 T 的不同的特征值, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 对应的特征向量,那么 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线性无关的;

(5) T 的谱 $\sigma(T)$ 或者是有限集,或者是仅以 0 为聚点的可数集;

(6) $\sigma(T^*) = \sigma(T)$,即 $\sigma(T^*) = \{\lambda \mid \lambda \in \sigma(T)\}$,且 T^* 与 T 的非零特征值相同;

(7) 设 $\lambda \in \sigma(T) = \sigma(T^*)$,且 $\lambda \neq 0$,那么对应的特征向量空间 $E_\lambda = N(\lambda I - T)$ 与 $E_\lambda^* = N(\lambda I - T^*)$ 具有相同的有限维数;

(8) 设 λ,μ 分别是 T 和 T^* 的特征值，$\lambda\neq\mu$，那么 T 对应于 λ 的特征向量空间 $E_\lambda = N(\lambda I - T)$ 与 T^* 对应于 μ 的特征向量空间 $E_\mu^* = N(\mu I - T^*)$ 正交，即对任意 $x\in E_\lambda$ 及 $f\in E_\mu^*$，都有 $f(x) = 0$；

(9) 设 $\lambda\neq 0$ 是 T 的特征值(从而 $\lambda\in\sigma_p(T^*)$)，那么算子方程 $(\lambda I - T)x = y$ 有解的充要条件是：y 与 $E_\lambda^* = N(\lambda I - T^*)$ 正交；

(10) 设 $\lambda\neq 0$ 是 T 的特征值，那么算子方程 $(\lambda I - T^*)f = g$ 有解的充要条件是：g 与 $E_\lambda = N(\lambda I - T)$ 正交.

作为例子，我们讲一下(1) 和(3) 的证明.

例 7.6 设 X 为无限维复 Banach 空间，$T\in C(X)$，则 $0\in\sigma(T)$.

证 反证法 假定 $0\notin\sigma(T)$，则 $0\in\rho(T)$，由正则点的定义，逆算子 $T^{-1}:R(T)\to X$ 存在且有界，$T^{-1}T = I$，因 T 为紧算子，由本章定理2.9知 $I:X\to X$ 为紧算子，由于 X 是无限维的，这是不可能的(本章例 2.14)，因此 $0\in\sigma(T)$.

例 7.7 设 X 为复 Banach 空间，$T\in C(X)$，$\lambda\neq 0$，$\lambda\in\sigma_p(T)$，证明 $N(\lambda I - T)$ 必为有限维赋范线性空间.

证 由本章推论 1.2，只需证明 $N(\lambda I - T)$ 中的单位球面 $S = \{x\in N(\lambda I - T) \mid \|x\| = 1\}$ 为紧集即可.

设 $\{x_n\}\subset S$，则 $(\lambda I - T)x_n = 0$，即 $Tx_n = \lambda x_n$，因 $\lambda\neq 0$，故 $\left(\frac{1}{\lambda}T\right)x_n = x_n (n = 1,2,\cdots)$. 由于 T 是紧算子，所以 $\frac{1}{\lambda}T$ 也是紧算子，因 $\{x_n\}$ 为 X 中有界集，由紧算子的定义，$\left\{\left(\frac{1}{\lambda}T\right)x_n\right\}$ 是 X 中列紧集，因此存在子列 $\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x\in X$，且由范数的连续性知 $\|x\| = 1$. 因 $\frac{1}{\lambda}T$ 是有界线性算子，故 $\left(\frac{1}{\lambda}T\right)x_{n_k}\to\left(\frac{1}{\lambda}T\right)x$，即

$x_{n_k} \to \left(\frac{1}{\lambda}T\right)x$，由极限惟一性，应有$\left(\frac{1}{\lambda}T\right)x = x$，即$(\lambda I - T)x = 0$，故$x \in S$.这表明$S$中的任一点列都有收敛的子列，且收敛子列的极限在$S$中，因此$S$是列紧集，且是闭集，故$S$是紧集，由推论1.2知$N(\lambda I - T)$是有限维赋范线性空间.

本节最后举一个求紧算子的谱的例子.

例 7.8 定义 $T: l^2 \to l^2$ 为

$$Tx = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \cdots, \frac{1}{n}x_n, \cdots\right)$$
$$(\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2),$$

(1) 证明 $T \in C(l^2)$；

(2) 求 $\sigma_p(T), \sigma(T), \rho(T)$.

解 (1) 容易验证 $T \in B(l^2)$，且 $\| T \| = 1$.

对 $\forall n \geqslant 1$，定义 $T_n: l^2 \to l^2$ 为

$$T_n x = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \cdots, \frac{1}{n}x_n, 0, 0\cdots\right)$$
$$(\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2),$$

易知 T_n 是有限秩算子，因此 $T_n \in C(l^2)$ $(n = 1, 2, \cdots)$(参见本章例 2.15).

对 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$，有

$$\| T_n x - Tx \|_2 = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} | x_k |^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} | x_k |^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1} \| x \|_2,$$

故
$$\| T_n - T \| \leqslant \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

由此知 $\{T_n\}$ 按算子范数收敛于 T，由本章定理 2.10 知

$T \in C(l^2)$，即 T 为 l^2 上的紧算子.

(2) 设 $\lambda \in \mathbf{C}$，对 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$，有

$$(\lambda I - T)x = \left((\lambda - 1)x_1, \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)x_2, \cdots, \left(\lambda - \frac{1}{n}\right)x_n, \cdots\right),$$

可见，当 $\lambda = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 时，$\lambda I - T$ 不是单射，而当 $\lambda \notin \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ 时，$\lambda I - T$ 是单射，故由点谱定义知，$\sigma_p(T) = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$.

由定理 7.6(1)，(2) 可知 $0 \in \sigma(T)$，且非零谱点都是特征值，故 $\sigma(T) = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$，从而 $\rho(T) = \mathbf{C} \setminus \sigma(T) = \left\{\lambda \mid \lambda \neq 0, 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$.

习 题 3.7

1. 设 X 为复赋范线性空间，$X \neq \{\theta\}$，$0, I$ 分别是 X 上的零算子和恒等算子，求 $\sigma(0), \sigma(I)$.

2. 定义 $T: C[a,b] \to C[a,b]$ 为

$$Tx(t) = \int_a^t x(u)\mathrm{d}u \quad (\forall x(t) \in C[a,b]),$$

证明 $0 \in \sigma_r(T)$.

3. 设 X 为复 Banach 空间，$T \in B(X)$，$\lambda \in \mathbf{C}$，且 $|\lambda| > \|T\|$. 证明 $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$.

4. 设 X 为复 Banach 空间，$T \in B(X)$，$R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} (\lambda \in \rho(T))$ 为 T 的预解算子，试证当 $\lambda \to \infty$ 时，$\|R_\lambda\| \to 0$.

5. 定义 $T: C[0,1] \to C[0,1]$ 为

$$Tx(t) = t^2 x(t) \quad (\forall x(t) \in C[0,1]),$$

求 $\sigma(T)$.

6. 定义 $T: l^2 \to l^2$ 为

$$Tx = \left(x_2, \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{3}x_4, \cdots\right) \quad (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2),$$

证明:(1) $T \in C(l^2)$;

(2) $\sigma_p(T) = \{0\}$.

第四章　Hilbert 空间及其上的线性算子

在上一章中，当我们引出赋范线性空间的概念时，曾指出范数是欧氏空间中向量长度的一种自然推广. 在欧氏空间中，除了向量的长度(模)之外，还有一些重要的概念，如两个向量的夹角，两个向量的垂直以及向量的投影等，这些概念在一般的赋范线性空间中并没有涉及，因此使得它们缺少许多几何属性，如勾股定理、正交投影与正交分解等性质.

我们现在要推广内积(数量积)的概念，得到内积空间与 Hilbert 空间，并着重介绍 Hilbert 空间上的有界线性算子和有界线性泛函的一些重要性质.

§1　Hilbert 空间的几何学

本节介绍内积空间与 Hilbert 空间的基本概念和基本性质.

§1.1　定义与基本性质

定义 1.1　设 $\boldsymbol{K}$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$，X 是 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间，若对 X 中任意两个元素 x,y，都对应着一个数 $(x,y)\in\boldsymbol{K}$，且满足下列条件:

(1) **共轭对称性**　对 $\forall x,y\in X$，有 $(x,y)=\overline{(y,x)}$;

(2) **对第一变元的线性**　对 $\forall x,y,z\in X$ 及 $\forall\lambda,\mu\in\boldsymbol{K}$，有 $(\lambda x+\mu y,z)=\lambda(x,z)+\mu(y,z)$;

(3) **正定性**　对 $\forall x \in X$,有$(x,x) \geqslant 0$,且$(x,x)=0$的充要条件是 $x=\theta$,则称(x,y)为元素 x 与y 的**内积**,定义了内积的线性空间 X 称为**内积空间**. 当 $\boldsymbol{K}$ 是实数(复数)域时,称 X 为**实(复)内积空间**,简称为内积空间.

在通常的讨论中,一般都以复内积空间作为研究对象.

注:1° 内积$(\cdot,\cdot)$是一个映射:$X \times X \to \boldsymbol{K}$,且满足定义 1.1 中的三个条件;

2° 内积$(\cdot,\cdot)$对第一变元是线性的,由条件(1),(2)知,对第二变元而言,$(\cdot,\cdot)$是共轭线性的,即对 $\forall x,y,z \in X$ 及 $\forall \lambda,\mu \in \boldsymbol{K}$,有$(x,\lambda y+\mu z)=\bar{\lambda}(x,y)+\bar{\mu}(x,z)$;

3° 当 X 是实线性空间时,条件(1)成为$(x,y)=(y,x)$,称为对称性,这时内积$(\cdot,\cdot)$对第二变元也是线性的.

为了探讨内积空间与赋范线性空间的关系,先介绍 Cauchy-Schwarz 不等式,这个不等式在内积空间中经常用到.

引理 1.1(Cauchy-Schwarz 不等式)　设 X 为内积空间,则对 $\forall x,y \in X$,有

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y). \tag{4.1}$$

证　当 $y=\theta$ 时,引理显然成立.

设 $y \neq \theta$,则$(y,y)>0$. 对 $\forall \lambda \in \boldsymbol{K}$,有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant (x-\lambda y,x-\lambda y)\\&=(x,x)-\lambda(y,x)-\bar{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2(y,y).\end{aligned}$$

取　$\lambda=\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$ 代入上式,得

$$(x,x)-\frac{(x,y)(y,x)}{(y,y)}-\frac{(x,y)(y,x)}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{|(y,y)|^2}(y,y) \geqslant 0,$$

即　$(x,x)-\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geqslant 0$,故有

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y).$$

可以证明,(4.1) 式中等式成立当且仅当 x,y 是线性相关的(留作练习).称(4.1) 式为 **Cauchy-Schwarz 不等式**.

定理 1.1 设 X 是内积空间,对 $\forall x \in X$,定义 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$,则 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数,从而 X 按 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间.

证 只需证明 $\|\cdot\|$ 满足范数公理的三个条件即可(参见第三章定义 1.3).

由内积定义易知,对 $\forall x,y \in X$ 及 $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,有

$$\|x\| \geqslant 0, \text{且 } \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta; \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

由于

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y,x+y) \\ &= (x,x)+(y,x)+(x,y)+(y,y) \\ &= (x,x)+2\mathrm{Re}(x,y)+(y,y) \\ &= \|x\|^2+2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2,\end{aligned}$$

利用引理 1.1,得 $\mathrm{Re}(x,y) \leqslant |(x,y)| \leqslant \|x\| \|y\|$,故

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\leqslant \|x\|^2+2\|x\| \|y\|+\|y\|^2 \\ &= (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

从而 $$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| (\forall x,y \in X).$$

因此,$\|\cdot\|$ 满足范数公理的三个条件,即 $\|\cdot\|$ 为 X 上的一个范数.

定义 1.2 设 X 为内积空间,称 $\|x\| = \sqrt{(x,x)} (\forall x \in X)$ 为由 X 的内积$(\cdot,\cdot)$ 诱导的范数.

定理 1.1 表明,内积空间 X 按内积诱导的范数成为赋范线性空间,从而也是度量空间,X 中的度量d 由范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 诱导,即对 $\forall x,y \in X$,

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y,x-y)},$$

因此可以在内积空间中讨论点列的收敛、极限等问题了.例如,X 中的点列$\{x_n\}$ 收敛于 $x \in X$ 即是指 $\|x_n - x\| \to 0 (n \to \infty)$.

利用内积诱导的范数,(4.1) 式可写为下面简单的形式

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \|y\| (\forall x,y \in X). \tag{4.2}$$

定义 1.3 设 X 为内积空间,如 X 按内积诱导的范数成为 Banach 空间,则称 X 为 **Hilbert 空间**. 因此,**Hilbert 空间是完备的内积空间**.

由前述可知,内积空间是特殊的赋范线性空间,Hilbert 空间是特殊的 Banach 空间.

例 1.1 在 n 维实线性空间 $\boldsymbol{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \boldsymbol{R}, i = 1,2,\cdots,n\}$ 中,对 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$,定义

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

则容易验证$(\cdot,\cdot)$为内积,故 $\boldsymbol{R}^n$ 是实内积空间.

$\boldsymbol{R}^n$ 中由内积诱导的范数为 $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$,由第三章例 1.11 知$(\boldsymbol{R}^n, \|\cdot\|_2)$是 Banach 空间,从而 $\boldsymbol{R}^n$ 是 Hilbert 空间,即欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是 Hilbert 空间.

例 1.2 在 n 维复线性空间 $\boldsymbol{C}^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \boldsymbol{C}, i = 1,2,\cdots,n\}$ 中,对 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \boldsymbol{C}^n$,定义

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i,$$

则 $\boldsymbol{C}^n$ 是内积空间,$\boldsymbol{C}^n$ 也是 Hilbert 空间(参见第三章例 1.12).

例 1.3 在实 $l^2 \triangleq \{x = (x_1, x_2, \cdots) | \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty, x_n \in \boldsymbol{R}, n = 1,2,\cdots\}$ 中,对 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$,定义

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n,$$

利用第一章中 Hölder 不等式知上述级数是收敛的，且容易验证 $(\cdot,\cdot)$ 为内积，故 l^2 是实内积空间. l^2 中由内积诱导的范数为 $\|x\|_2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$，由第三章例1.14知，$(l^2,\|\cdot\|_2)$ 为Banach 空间，故 l^2 是 Hilbert 空间.

类似地，在复 $l^2 \triangleq \{x=(x_1,x_2,\cdots)\mid \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<+\infty,$ $x_n\in \boldsymbol{C}, n=1,2,\cdots\}$ 中，定义 $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\bar{y}_n$ $(\forall x=(x_1,x_2,\cdots), y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^2)$，则复 l^2 是 Hilbert 空间.

例 1.4 在实 $L^2[a,b]\triangleq\{x(t)$ 为 $[a,b]$ 上 Lebesgue实值可测函数 $\left|\int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t<+\infty\right\}$ 中，对 $\forall x(t),y(t)\in L^2[a,b]$，定义

$$(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

利用第一章中 Hölder 不等式知 $x(t)y(t)\in L[a,b]$，容易验证 $L^2[a,b]$ 是内积空间，$L^2[a,b]$ 中由内积诱导的范数为 $\|x\|_2=\left(\int_a^b x^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$，由第三章例 1.15 知 $(L^2[a,b],\|\cdot\|_2)$ 为 Banach 空间，故 $L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间.

类似地，在复 $L^2[a,b]\triangleq\{x(t)$ 为 $[a,b]$ 上 Lebesgue 复值可测函数 $\left|\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty\right\}$ 中，定义 $(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t$ $(\forall x(t),y(t)\in L^2[a,b])$，则复 $L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间.

下面介绍内积空间的一些基本性质.

定理 1.2(内积的连续性) 设 X 为内积空间，$\{x_n\}\subset X$，$\{y_n\}\subset X$，且 $x_n\to x$，$y_n\to y$，则 $(x_n,y_n)\to(x,y)$.

证 因 $x_n\to x$，由范数的连续性，$\|x_n\|\to\|x\|$，故存在常数 $M>0$，使得 $\|x_n\|\leqslant M \quad (n=1,2,\cdots)$.

由于
$$
\begin{aligned}
0&\leqslant|(x_n,y_n)-(x,y)|\\
&=|(x_n,y_n)-(x_n,y)+(x_n,y)-(x,y)|\\
&=|(x_n,y_n-y)+(x_n-x,y)|\\
&\leqslant|(x_n,y_n-y)|+|(x_n-x,y)|\\
&\leqslant\|x_n\|\,\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\,\|y\|\\
&\leqslant M\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\,\|y\|\to 0\quad(n\to\infty),
\end{aligned}
$$
故 $(x_n,y_n)\to(x,y)$.

前面我们利用内积空间中的内积定义出了范数；反过来，利用内积诱导的范数也可将内积用范数表示出来.

定理 1.3(极化恒等式) 设 X 为内积空间，$\forall x,y\in X$，则

(1) 当 X 是实内积空间时，有
$$
(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2);\tag{4.3}
$$
(2) 当 X 是复内积空间时，有
$$
(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2).\tag{4.4}
$$

证 利用内积空间中的内积与范数的关系 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}\,(\forall x\in X)$，直接验证即可，具体从略.

我们已经知道，内积空间按内积诱导的范数成为赋范线性空间，现在要问：赋范线性空间是不是内积空间呢？**这里所说的赋范线性空间成为内积空间是指由内积诱导的范数恰好是原先的范**

数. 下面的定理回答了这一问题.

定理1.4 设 X 为赋范线性空间, $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数,则 X 成为内积空间的充要条件是:对 $\forall x,y\in X$,有下式成立

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{4.5}$$

称(4.5) 式为**平行四边形公式**.

证 必要性 设 X 成为内积空间,将范数用内积表示,对 $\forall x,y\in X$,有

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\\
&=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\
&=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\\
&\quad+(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y)\\
&=2[(x,x)+(y,y)]\\
&=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\text{必要性得证}.
\end{aligned}$$

充分性 不妨设 X 是复赋范线性空间,且(4.5) 式成立. 对 $\forall x,y\in X$,令

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2),$$

可以证明$(\cdot,\cdot)$确实是 X 上的内积,且由此内积诱导的范数与原先的范数相同,故 X 成为内积空间. 具体证明从略,有兴趣的读者可参见书目[2]. 充分性得证.

下面举例说明存在赋范线性空间,但它不是内积空间.

例1.5 对于线性空间 $\boldsymbol{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{R},\ i=1,2,\cdots,n\}$,容易验证 $\boldsymbol{R}^n$ 按 $\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$ 成为赋范线性空间,证明$(\boldsymbol{R}^n,\|\cdot\|_1)$不成为内积空间.

证 取 $x=(1,0,0,\cdots,0)$, $y=(0,1,0,\cdots,0)\in\boldsymbol{R}^n$,显然有 $\|x\|_1=\|y\|_1=1$. 又 $x+y=(1,1,0,\cdots,0)$, $x-y=(1,-1,0,\cdots,0)$,故 $\|x+y\|_1^2+\|x-y\|_1^2=2^2+2^2=8\neq$

$2(\|x\|_1^2+\|y\|_1^2)$，因此平行四边形公式不成立，由定理 1.4，$(\boldsymbol{R}^n,\|\cdot\|_1)$ 不成为内积空间.

设 $p>1, p\neq 2$，由第三章例 1.11，$\boldsymbol{R}^n$ 按 $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 成为赋范线性空间，类似地可证 $(\boldsymbol{R}^n,\|\cdot\|_p)$ 不成为内积空间.

例 1.6 已知 $C[a,b]$ 按 $\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$ 成为 Banach 空间（自然也是赋范线性空间），证明 $(C[a,b],\|\cdot\|)$ 不成为内积空间.

证 取 $x(t)\equiv 1, y(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$，显然 $x(t),y(t)\in C[a,b]$，且 $\|x\|=1,\|y\|=1$，又 $x(t)+y(t)=\dfrac{t+b-2a}{b-a}$，$x(t)-y(t)=\dfrac{b-t}{b-a}$，易求得 $\|x+y\|=2,\|x-y\|=1$，故 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5\neq 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$，因此平行四边形公式不成立，由定理 1.4，$(C[a,b],\|\cdot\|)$ 不成为内积空间.

例 1.7 已知 $L[0,2]$ 按 $\|x\|_1=\int_0^2|x(t)|\mathrm{d}t$ 成为赋范线性空间（见第三章例 1.15），证明 $(L[0,2],\|\cdot\|_1)$ 不成为内积空间.

证 取 $x(t)\equiv 1, y(t)=t$，则 $x(t),y(t)\in L[0,2]$，且 $\|x\|_1=2,\|y\|_1=2,\|x+y\|_1=\int_0^2|1+t|\mathrm{d}t=4$，$\|x-y\|_1=\int_0^2|1-t|\mathrm{d}t=1$，故 $\|x+y\|_1^2+\|x-y\|_1^2=17\neq 2(\|x\|_1^2+\|y\|_1^2)$，因此平行四边形公式不成立，由定理 1.4，$(L[0,2],\|\cdot\|_1)$ 不成为内积空间.

类似可证，当 $p>1, p\neq 2$ 时，$(L^p[a,b],\|\cdot\|_p)$（见第三章

例 1.15）不成为内积空间.

§1.2　正交分解与投影定理

在解析几何中有向量垂直的概念，而且两个向量垂直的充要条件是它们的数量积（内积）为零.下面我们将欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中向量垂直的概念予以推广，在一般的内积空间中利用内积引入两个向量正交的概念，并由此导出正交分解与正交投影等概念.

定义1.4　设 X 为内积空间，$x, y \in X$，如果 $(x, y) = 0$，则称 x 与 y 是**正交**的，记作 $x \perp y$.

设 M 为 X 的一个非空子集，若向量 x 与 M 中的所有向量正交，则称 x 与 M 正交，记作 $x \perp M$.

设 M, N 为 X 的两个非空子集，若对 $\forall x \in M, \forall y \in N$，都有 $x \perp y$，则称 M 与 N 正交，记作 $M \perp N$.

设 M 为 X 的非空子集，X 中所有与 M 正交的向量的全体称为 M 的**正交补**，记作 $M^{\perp}$，即 $M^{\perp} = \{x \in X \mid x \perp M\}$.

由定义 1.4，容易证明下列性质（作为练习）：

(1) 正交是相互的，即若 $x \perp y$，则 $y \perp x$；

(2) $x \perp X \Longleftrightarrow x = \theta$；

(3) 若 $M \subset N$，则 $M^{\perp} \supset N^{\perp}$；

(4) 对 X 的任一非空子集 M，有 $M \cap M^{\perp} = \{\theta\}$.

定理 1.5（勾股定理）　设 X 为内积空间，$x, y \in X$，且 $x \perp y$，则

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2.$$

证　因 $x \perp y$，故 $(x, y) = 0, (y, x) = 0$，从而

$$\begin{aligned}\| x + y \|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &= \| x \|^2 + \| y \|^2.\end{aligned}$$

定理1.6　设 X 为内积空间，M 为 X 的任一非空子集，则 $M^{\perp}$

是 X 的闭线性子空间.

证 设 $x,y\in M^{\perp},\lambda,\mu\in \boldsymbol{K}$,则对 $\forall z\in M$,有

$$(\lambda x+\mu y,z)=\lambda(x,z)+\mu(y,z)=0.$$

故 $\lambda x+\mu y\in M^{\perp}$,即 $M^{\perp}$ 为 X 的线性子空间.

其次,若 $\{x_n\}\subset M^{\perp}$,且 $x_n\to x$,则由内积的连续性,对 $\forall z\in M$,有 $(x,z)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,z)=0$,故 $x\in M^{\perp}$,即 $M^{\perp}$ 为 X 中的闭集,从而 $M^{\perp}$ 是 X 的闭线性子空间.

在解析几何中,有向量投影的概念,我们知道,若 M 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的任一线性子空间(例如,通过原点的直线或平面),则对 $\forall x\in \boldsymbol{R}^3$,$x$ 可以分解成两个向量之和,即 $x=x_0+x_1$,其中 $x_0\in M,x_1\perp M$,上述分解称为 x 关于 M 的正交分解.现推广这一概念到一般的内积空间中去.

定义 1.5 设 X 为内积空间,M 为 X 的线性子空间,$x\in X$,如存在 $x_0\in M,x_1\in M^{\perp}$,使得

$$x=x_0+x_1,\tag{4.6}$$

则称 x_0 为 x 在 M 上的**正交投影**(简称**投影**),(4.6)式称为 x 关于 M 的**正交分解**.

一般来说,对内积空间中的任一向量 x 及任一线性子空间 M,x 在 M 上的投影不一定存在,但当 X 是 Hilbert 空间时,若 M 是 X 的闭线性子空间,则对 $\forall x\in X$,x 在 M 上的投影必定存在而且惟一,这就是下面要介绍的投影定理.

引理 1.2(变分引理) 设 H 是 Hilbert 空间,M 是 H 中的非空闭凸集,$x\in H$,记 x 到 M 的距离为 $d=d(x,M)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$,则必存在惟一的 $x_0\in M$,使得 $\|x-x_0\|=d$.

证 由实数集的下确界性质知,存在 $\{y_n\}\subset M$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-y_n\|=d$.下面先证明 $\{y_n\}$ 为 H 中的 Cauchy 列.

因 M 为凸集,故$\frac{y_m+y_n}{2}\in M$,从而$\left\|x-\frac{y_m+y_n}{2}\right\|\geqslant d$,由平行四边形公式,得

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \|y_m-y_n\|^2=\|(y_m-x)+(x-y_n)\|^2\\
&=2[\|y_m-x\|^2+\|x-y_n\|^2]\\
&\quad-\|(y_m-x)-(x-y_n)\|^2\\
&=2[\|x-y_m\|^2+\|x-y_n\|^2]-\|y_m+y_n-2x\|^2\\
&=2[\|x-y_m\|^2+\|x-y_n\|^2]-4\left\|x-\frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2\\
&\leqslant 2[\|x-y_m\|^2+\|x-y_n\|^2]-4d^2\to 0\quad(m,n\to\infty\text{时}),
\end{aligned}
$$

故$\{y_n\}$为 H 中的 Cauchy 列,因 H 是完备的,所以$\{y_n\}$在 H 中收敛,又因$\{y_n\}\subset M$,M 为闭集,故$\{y_n\}$的极限在 M 中,即存在 $x_0\in M$,使得 $y_n\to x_0$. 由范数的连续性,有 $\|x-x_0\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x-y_n\|=d$.

再证 x_0 的惟一性. 假定还有 $y_0\in M$,使得 $\|x-y_0\|=d$,由于 M 为凸集,则$\frac{x_0+y_0}{2}\in M$.

由平行四边形公式,得

$$
\begin{aligned}
2d^2 &= \|x-x_0\|^2+\|x-y_0\|^2\\
&=\frac{1}{2}[\|(x-x_0)+(x-y_0)\|^2\\
&\quad+\|(x-x_0)-(x-y_0)\|^2]\\
&=\frac{1}{2}[\|2x-(x_0+y_0)\|^2+\|x_0-y_0\|^2]\\
&=2\left\|x-\frac{x_0+y_0}{2}\right\|^2+\frac{1}{2}\|x_0-y_0\|^2\\
&\geqslant 2d^2+\frac{1}{2}\|x_0-y_0\|^2,
\end{aligned}
$$

由此便知 $x_0 = y_0$. 引理得证.

变分引理是内积空间中的一条基本引理,它表述一种极值可达的基本结论,在最优化理论、逼近论、现代控制理论及微分方程等领域中都有着重要应用.

定理 1.7(投影定理) 设 H 是 Hilbert 空间, M 是 H 的闭线性子空间,则对任一 $x \in H$, x 在 M 上的投影存在而且惟一,即存在惟一的 $x_0 \in M$ 及 $x_1 \in M^{\perp}$,使得 $x = x_0 + x_1$. 特别当 $x \in M$ 时, $x_0 = x, x_1 = \theta$.

证 因线性子空间是凸集,由变分引理,有 $x_0 \in M$,使 $\| x - x_0 \| = d = \inf\limits_{y \in M} \| x - y \|$.

令 $x_1 = x - x_0$,那么 $\| x_1 \| = \| x - x_0 \| = d$. 下证 $x_1 \in M^{\perp}$.

任取 $y \in M$,不妨设 $y \neq \theta$,要证 $(x_1, y) = 0$.

对 $\forall \lambda \in \boldsymbol{K}$,有 $x_0 + \lambda y \in M$,故

$$
\begin{aligned}
d^2 &\leqslant \| x - (x_0 + \lambda y) \|^2 = \| x_1 - \lambda y \|^2 \\
&= (x_1 - \lambda y, x_1 - \lambda y) \\
&= (x_1, x_1) - (x_1, \lambda y) - (\lambda y, x_1) + (\lambda y, \lambda y) \\
&= \| x_1 \|^2 - 2\mathrm{Re}(x_1, \lambda y) + |\lambda|^2 \| y \|^2 \\
&= d^2 - 2\mathrm{Re}[\bar{\lambda}(x_1, y)] + |\lambda|^2 \| y \|^2,
\end{aligned}
$$

令 $\lambda = \dfrac{(x_1, y)}{\| y \|^2}$,代入上式,得

$$
\begin{aligned}
d^2 &\leqslant d^2 - 2\mathrm{Re}\left[\overline{\frac{(x_1, y)}{\| y \|^2}}(x_1, y)\right] + \frac{|(x_1, y)|^2}{\| y \|^2} \\
&= d^2 - \frac{|(x_1, y)|^2}{\| y \|^2},
\end{aligned}
$$

故 $(x_1, y) = 0$,即 $x_1 \perp y$,由 y 的任意性知 $x_1 \perp M$,即 $x_1 \in M^{\perp}$.

由此便有 $x = x_0 + x_1$,其中 $x_0 \in M$, $x_1 \in M^{\perp}$, x_0 即为 x

在 M 上的投影. 下面再证明投影的惟一性.

事实上,假如 x_0, x'_0 都是 x 在 M 上的投影,则 $x_0, x'_0 \in M$,且 $x - x_0 \perp M$, $x - x'_0 \perp M$,从而 $x_0 - x'_0 \perp M$,又因 $x_0 - x'_0 \in M$,故 $x_0 - x'_0 \in M \cap M^{\perp} = \{\theta\}$,即 $x_0 = x'_0$,惟一性得证.

设 H 为 Hilbert 空间,M 为 H 的闭线性子空间,由投影定理,对 $\forall x \in H$,有惟一的正交分解式 $x = x_0 + x_1$,其中 $x_0 \in M$, $x_1 \in M^{\perp}$,将这一结果表示成为下面的形式

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

即 H 可分解成闭线性子空间 M 与它的正交补 $M^{\perp}$ 的直和.

§1.3 内积空间中的正交系

在这一节,我们要将三维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的任一向量可以惟一地表示为单位坐标向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的线性组合这一重要性质推广到 Hilbert 空间中去. 为此,先介绍一些基本概念与性质.

定义 1.6 设 X 为内积空间,$\{x_n\}$ 为 X 中有限个或可数个非零向量,若当 $m \neq n$ 时,有 $(x_m, x_n) = 0$,则称 $\{x_n\}$ 为 X 中的一个**正交系**. 此外,若对每个 $n \geqslant 1$,有 $(x_n, x_n) = 1$(即 $\| x_n \| = 1$,称 x_n 为单位向量.),则称 $\{x_n\}$ 为 X 中的一个**标准正交系**.

例 1.8 欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 n 个向量 $e_1 = (1,0,\cdots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $e_n = (0,0,\cdots,0,1)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个标准正交系.

例 1.9 在 Hilbert 空间 l^2 中,令

$$e_n = (\underbrace{0,0,\cdots,0,1}_{n个},0,0,\cdots)\ (n = 1,2,\cdots),$$

易知 $\{e_n\}$ 是 l^2 中的一个标准正交系.

例 1.10 在复 Hilbert 空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 中,函数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}\right\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 是复 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的一个标准正

交系.

例 1.11 在实 Hilbert 空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 中，函数列 $e_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},e_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,e'_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$ $(n=1,2,\cdots)$ 构成实 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的一个标准正交系.

定理 1.8 设 X 为内积空间,$\{x_n\}$ 为 X 中的任一标准正交系,则 $\{x_n\}$ 中任意有限个向量都是线性无关的.

证 对 $\forall k\geqslant 1$,不失一般性,只要证 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 线性无关即可.

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\in\mathbf{K}$,使得 $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k=\theta$,对 $\forall$ 固定 $j(1\leqslant j\leqslant k)$,则有

$$\begin{aligned}0&=(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k,x_j)\\&=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x_i,x_j)=\lambda_j(x_j,x_j)=\lambda_j,\end{aligned}$$

即 $\lambda_j=0(1\leqslant j\leqslant k)$,故 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 线性无关.

与有限维空间的情形类似,可以将内积空间中任一线性无关的向量列化为一个标准正交系.即有如下定理.

定理 1.9(Gram-Schmidt 正交化定理) 设 X 是内积空间,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中的一个线性无关向量列,则存在 X 中的一个标准正交系 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$,使得对 $\forall n\geqslant 1$,有 $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

证 因 $x_1\neq\theta$,令 $e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}$,则 $\|e_1\|=1$,且 $\mathrm{span}\{e_1\}=\mathrm{span}\{x_1\}$.

令 $y_2=x_2-(x_2,e_1)e_1$,则 $(y_2,e_1)=(x_2,e_1)-(x_2,e_1)(e_1,e_1)=0$,故 $y_2\perp e_1$,由于 x_1,x_2 线性无关,所以 $y_2\neq\theta$.

令 $e_2=\frac{y_2}{\|y_2\|}$,则 $\{e_1,e_2\}$ 是一个标准正交系,且 $\mathrm{span}\{e_1,$

$e_2\} = \text{span}\{x_1, x_2\}$.

下面用数学归纳法. 假定已有$\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$是一个标准正交系，且$\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\} = \text{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$.

令$y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}, e_i)e_i$，则对$j = 1,2,\cdots,k$，有

$$
\begin{aligned}
(y_{k+1}, e_j) &= (x_{k+1}, e_j) - \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}, e_i)(e_i, e_j) \\
&= (x_{k+1}, e_j) - (x_{k+1}, e_j) = 0,
\end{aligned}
$$

即$y_{k+1} \perp e_j (j = 1,2,\cdots,k)$，由于$x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$线性无关，故$y_{k+1} \neq \theta$.

令$e_{k+1} = \dfrac{y_{k+1}}{\| y_{k+1} \|}$，则$\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}\}$是一个标准正交系，且$e_{k+1}$是$x_{k+1}, e_1, \cdots, e_k$的线性组合，从而是$x_{k+1}, x_1, x_2, \cdots, x_k$的线性组合，因此

$$
\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}\} \subset \text{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}\}.
$$

另一方面，$x_{k+1} = y_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}, e_i)e_i = \| y_{k+1} \| e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}, e_i)e_i$，故$x_{k+1}$是$e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}$的线性组合，从而$\text{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}\} \subset \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}\}$. 由此得知$\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}\} = \text{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}\}$.

由归纳法原理，可知存在X中的一个标准正交系$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得对$\forall n \geqslant 1$，有$\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} = \text{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

下面我们将高等数学中的 Fourier 级数概念推广到内积空间中去.

定义 1.7　设X为内积空间，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$为X中的一个标准正交系，$x \in X$，称$\{(x, e_n)\}_{n=1}^{\infty}$为$x$关于标准正交系$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$的**Fourier**

系数;称级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$为$x$关于$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$的 **Fourier 级数**,记作

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n.$$

如果$x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$,即$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right\|\to 0$,则称$x$关于$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$可以展开成 Fourier 级数.

下面讨论x的 Fourier 级数是否一定收敛?如果收敛,是否收敛于x?

定理 1.10(Bessel 不等式) 设X为内积空间,$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$为X中的一个标准正交系,则对任一$x\in X$,级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2$都收敛,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{4.7}$$

证 对$\forall n\geqslant 1$,令$M_n=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,则$M_n$为$X$中有限维线性子空间.

令$x_0=\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$,则$x_0\in M_n$,且

$$(x_0,e_k)=(x,e_k)\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

由此知$x-x_0\perp M_n$,特别地,有$x-x_0\perp x_0$.

由勾股定理,有

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|(x-x_0)+x_0\|^2\\ &= \|x-x_0\|^2+\|x_0\|^2\\ &\geqslant \|x_0\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|(x,e_k)e_k\|^2\\ &= \sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2\quad(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$,得 $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2$.

(4.7) 式称为 **Bessel 不等式**.

推论 1.1 设 X 为内积空间,$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中的一个标准正交系,则对任一 $x \in X$,都有 $\lim_{n \to \infty} (x, e_n) = 0$.

定理 1.11 设 H 为 Hilbert 空间,$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 中的一个标准正交系,则对任一 $x \in H$,x 的 Fourier 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ 在 H 中收敛.

证 记 $s_n = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \quad (n = 1, 2, \cdots)$,下证 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 中的 Cauchy 列.

当 $m > n$ 时,有

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} (x, e_k) e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |(x, e_k)|^2,$$

由 Bessel 不等式,正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$ 收敛,故当 m, n 充分大时,$\sum_{k=n+1}^{m} |(x, e_k)|^2$ 可以任意小,即 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 中的 Cauchy 列,由于 H 是完备的,所以 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 H 中收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ 在 H 中收敛.

什么时候 Bessel 不等式成为等式呢?这与 X 中的标准正交系所含的向量有没有选得“足够多”有关.例如在 $\boldsymbol{R}^3$ 中,若选 $e_1 = (1,0,0)$,$e_2 = (0,1,0)$,$e_3 = (0,0,1)$,则对 $\forall x \in \boldsymbol{R}^3$,有 $x = \sum_{n=1}^{3} (x, e_n) e_n$,且 $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{3} |(x, e_n)|^2$.若在 $\boldsymbol{R}^3$ 中只选了仅由两个向量构成的标准正交系,则上述等式不成立.

为此，引入下面的定义.

定义 1.8 设 X 为内积空间，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中的一个标准正交系，如果对任一 $x \in X$，有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2, \tag{4.8}$$

则称 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中是**完备**的.(4.8) 式称为 **Parseval 等式**.

如果 $x \in X, x \perp e_n (n = 1, 2, \cdots)$，则必有 $x = \theta$，即 X 中不再有非零向量，使它与所有的 e_n 正交，则称 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中是**完全**的.

下面讨论 Parseval 等式与向量 x 的 Fourier 级数展开问题.

定理 1.12 设 H 为 Hilbert 空间，$M = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 中的一个标准正交系，则下列四个条件等价：

(1) M 为 H 中的完全标准正交系；

(2) $\overline{\text{span}M} = H$；

(3) M 是 H 中的完备标准正交系，即对任一 $x \in H$，Parseval 等式 $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$ 成立；

(4) 对任一 $x \in H$，有 $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$，即 x 的 Fourier 级数在 H 中收敛于 x.

证 (1)⇒(2) 设 $M = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 中的一个完全标准正交系. 假定 $\overline{\text{span}M} \neq H$，则存在 $x \in H \setminus \overline{\text{span}M}$，$x \neq \theta$，由投影定理，有 $x = x_0 + x_1$，其中 $x_0 \in \overline{\text{span}M}$，$x_1 \in (\overline{\text{span}M})^{\perp}$，且 $x_1 \neq \theta$，从而 $x_1 \perp e_n (n = 1, 2, \cdots)$，这与 $M = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的完全性矛盾，故 $\overline{\text{span}M} = H$.

(2)⇒(3) 证明略去，有兴趣的读者可参见书目[2].

(3)⇒(4) 设对 $\forall x \in H$，有 $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$. 对 n

$\geqslant 1$，令 $s_n = \sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$，易证 $x - s_n \perp s_n$，从而由勾股定理，得

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|(x - s_n) + s_n\|^2 \\ &= \|x - s_n\|^2 + \|s_n\|^2 \\ &= \|x - s_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2,\end{aligned}$$

由假设，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2 = \|x\|^2$，从而 $\lim_{n\to\infty}\|x - s_n\|^2 = 0$，即

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k.$$

(4)⇒(1)　设对 $\forall x \in H$，有 $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$，要证 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 中的完全标准正交系. 现设 $x \in H, x \perp e_n (n = 1, 2, \cdots)$，则 $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}0e_n = \theta$，由定义 1.8，得证.

下面的定理表明，可分的 Hilbert 空间 H 一定有由至多可数个向量构成的完全标准正交系，因此，由定理 1.12，对于这个完全标准正交系而言，H 中的任一向量 x 都可以展开为 Fourier 级数，且 Parseval 等式成立.

定理 1.13　设 H 为可分的 Hilbert 空间，则 H 中一定有由至多可数个向量构成的完全标准正交系.

证　若 $\dim H = n$，且 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 H 的一个基，则由定理 1.9，H 中有标准正交系 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，且 $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，易知 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 在 H 中是完全的.

下设 H 为无限维 Hilbert 空间，因 H 可分，故存在可数子集 $\{g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots\}$ 在 H 中稠密.

首先，在 $\{g_n\}$ 中选出线性无关的向量组，方法如下：设 $\{g_n\}$ 中的第一个非零向量为 g_{n_1}，令 $x_1 = g_{n_1}$，然后在 $\{g_n\}$ 中取第一个与

g_{n_1} 线性无关的向量 g_{n_2}，令 $x_2 = g_{n_2}$. 用归纳法可取出$\{g_n\}$中线性无关的向量组$\{g_{n_k}\}$，令 $x_k = g_{n_k}$，则$\{x_k\}$为线性无关向量组，且 $\text{span}\{g_n\} = \text{span}\{x_k\}$.

因 H 是无限维空间，所以$\{x_k\}$为可数集，由定理 1.9，得到由可数个向量构成的标准正交系$\{e_k\}$，且有 $\text{span}\{e_k\} = \text{span}\{x_k\} = \text{span}\{g_n\}$，因$\overline{\text{span}\{g_n\}} = H$，故$\overline{\text{span}\{e_k\}} = H$，由定理 1.12 知$\{e_k\}$为 H 中的一个完全标准正交系.

例 1.12 在例 1.9 中，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 即为 l^2 中的一个完全标准正交系，这可由定义 1.8 直接验证.

例 1.13 在例 1.11 中，利用 Lebesgue 积分知识可以证明函数列 $e_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, e'_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt\ (n = 1,2,\cdots)$ 是实 Hilbert 空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的一个完全标准正交系(有关证明略).

由定理 1.12 可知，在实 Hilbert 空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 中，任一函数 $x(t)$ 可以展开为：

$$x(t) = \left(x,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left(x,\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} + \left(x,\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} + \cdots$$
$$+ \left(x,\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + \left(x,\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} + \cdots.$$

令 $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\mathrm{d}t,\quad a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,\mathrm{d}t,$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \quad (n = 1,2,\cdots),$$

则得到通常的 Fourier 级数的形式：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt),$$

注意这里等式的含义是：右端的级数按 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的范数(由内积诱导)收敛于 $x(t)$.

§1.4 可分 Hilbert 空间的模型

为了得到可分的 Hilbert 空间的具体模型，先引入内积空间同构的概念.

定义 1.9 设 X_1, X_2 是两个内积空间，若存在双射 $\varphi: X_1 \to X_2$，且保持线性运算和内积，即对 $\forall x, y \in X_1$ 及 $\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$，都有

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y),$$
$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y),$$

则称内积空间 X_1 和 X_2 是**同构**的.

对于任一抽象的 Hilbert 空间，下面研究它能与怎样具体的 Hilbert 空间同构.

定理 1.14(Riesz-Fischer 定理) 设 H 是 Hilbert 空间，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的一个标准正交系，又设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots) \in l^2$，则存在 $x \in H$，使得(1) $\alpha_n = (x, e_n)(n = 1,2,\cdots)$；(2) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$.

证 设 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \, (n = 1,2,\cdots)$，下证 $\{s_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 列.

对 $\forall m, n \in \boldsymbol{N}$(设 $m > n$)，利用 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是标准正交系，有

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_k|^2,$$

因为 $\alpha \in l^2$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ 收敛，因此当 $m, n \to \infty$ 时，$\sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_k|^2 \to 0$，即 $\|s_m - s_n\| \to 0(m, n \to \infty)$，从而 $\{s_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 列，由 H 的完备性，存在 $x \in H$，使得 $s_n \to x$，即 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

由内积的连续性，对 $\forall n\geqslant 1$，有

$$(x,e_n)=\lim_{k\to\infty}(s_k,e_n)=\lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{k}\alpha_je_j,e_n\Big)=\lim_{k\to\infty}\alpha_n=\alpha_n,$$

故 $x=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_ke_k=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$.

利用范数的连续性，有

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\lim_{n\to\infty}\|s_n\|^2=\lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_ke_k\Big\|^2\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2.\end{aligned}$$

定理 1.15 n 维实 Hilbert 空间与 $\boldsymbol{R}^n$ 同构；n 维复 Hilbert 空间与 $\boldsymbol{C}^n$ 同构.

证 这里就实空间情形予以证明，复空间情形类似地可以证明.

设 H 为 n 维实 Hilbert 空间，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 H 的一个基，由定理 1.9，可得 H 的一个完全标准正交系 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$.

作映射 $\varphi:H\to\boldsymbol{R}^n$ 为

$$\varphi(x)=((x,e_1),(x,e_2),\cdots,(x,e_n))\ (\forall x\in \boldsymbol{H}),$$

容易验证 φ 是 H 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的双射，且保持线性运算和内积，因此 H 与 $\boldsymbol{R}^n$ 同构.

关于无限维可分的 Hilbert 空间，有如下定理.

定理 1.16 设 H 为无限维可分的 Hilbert 空间，则 H 与 l^2（实或者复的）同构.

证 由定理 1.13，H 中有由可数个向量构成的完全标准正交系 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

作映射 $\varphi:H\to l^2$ 为

$$\varphi(x)=((x,e_1),(x,e_2),\cdots,(x,e_n),\cdots)\ (\forall x\in H).$$

由 Bessel 不等式，$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2$，可知 φ 有明确的定义，$\varphi(x) \in l^2(\forall x \in H)$，易知 φ 保持线性运算.

由定理1.12，$\|\varphi(x)\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2 = \|x\|^2$，故 φ 是单射.

由 Riesz-Fischer 定理，对 $\forall \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots) \in l^2$，存在 $x \in H$，使得 $(x,e_n) = \alpha_n (n = 1,2,\cdots)$，从而 $\varphi(x) = ((x,e_1),(x,e_2),\cdots) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots) = \alpha$，故 φ 是满射，因此 φ 是从 H 到 l^2 的双射.

下面证明 φ 保持内积.

对 $\forall x,y \in H$，由定理 1.12，有 $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$，$y = \sum_{n=1}^{\infty}(y,e_n)e_n$，由内积的连续性，得

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k, \sum_{k=1}^{n}(y,e_k)e_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)\overline{(y,e_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\overline{(y,e_k)} \\
&= (\varphi(x),\varphi(y)),
\end{aligned}
$$

由定义 1.9，H 与 l^2 同构.

定理1.15和1.16表明，$\boldsymbol{R}^n$（或 $\boldsymbol{C}^n$）是有限维（n 维）Hilbert 空间的模型，l^2 是无限维可分的 Hilbert 空间的模型.

习　题　4.1

1. 设 X 为内积空间，$x,y \in X$，若对 $\forall z \in X$，都有 $(x,z) = (y,z)$，证明 $x = y$.

2. 设 X 为内积空间，$\{x_n\}$，$\{y_m\}$ 为 X 中的两个点列，且 $x_n \to x, y_m \to y$，证明 $(x_n, y_m) \to (x, y)$ $(m, n \to \infty)$.

3. 设 X 为内积空间，$\{x_n\} \subset X, x \in X$，如果 $\|x_n\| \to \|x\|$，$(x_n, x) \to (x, x)$，证明 $x_n \to x$.

4. 设 X 为实内积空间，x, y 为非零向量，证明 $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ 当且仅当存在 $\lambda > 0$，使得 $y = \lambda x$.

5. 证明赋范线性空间$(\boldsymbol{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$不成为内积空间，其中 $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ $(\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n)$.

6. 设 $1 \leqslant p < +\infty, p \neq 2$，证明赋范线性空间$(l^p, \|\cdot\|_p)$不成为内积空间.

7. 设 X 为内积空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 X 中两两正交的向量，则

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

8. 设 X 为内积空间，M 为 X 中的非空子集，证明 $M^\perp = (\overline{M})^\perp$.

9. 设 H 为 Hilbert 空间，M 为 H 的闭线性子空间，证明 $M = (M^\perp)^\perp$.

10. 设 X 为内积空间，$\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 为 X 中的完备标准正交系，证明$\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 为 X 中的完全标准正交系.

11. 设 X 为内积空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 X 中的一个标准正交系，对任一 $x \in X$，令 $x_0 = \sum\limits_{k=1}^n (x, e_k) e_k$，证明对任意的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{K}$，有

$$\|x - x_0\| \leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right\|.$$

12. 设 H 为 Hilbert 空间，M 为 H 中的非空凸集，点列 $\{x_n\} \subset M$，且 $\|x_n\| \to d$，这里 $d = \inf\limits_{x \in M} \|x\|$，证明$\{x_n\}$在 H 中收敛.

13. 设 X 为内积空间，M 为 X 的线性子空间，$x \in X$. 如果 x_0 是 x 在 M 上的投影，证明 $\|x - x_0\| = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$.

§2 Hilbert 空间上的有界线性泛函

本节主要介绍 Hilbert 空间上的有界线性泛函的一般形式以

及 Hilbert 空间的另一个重要特性 —— 自共轭性.

当 H 是 Hilbert 空间时,第三章 §3 中关于赋范线性空间上的有界线性泛函以及共轭空间的一般性质在 Hilbert 空间 H 中同样适用.但 H 中有内积,这是一般的 Banach 空间所没有的,因此,关于 H 上的有界线性泛函以及 H 本身有一些更深入的结果.

由第三章定理 3.4,便有如下定理.

定理 2.1 设 X 为内积空间,则 X 的共轭空间 X^* 是 Banach 空间.

例 2.1 设 X 是内积空间,任意固定 $y \in X$,定义映射 $F_y: X \to \boldsymbol{K}$ 为

$$F_y(x) = (x, y)\ (\forall\, x \in X), \tag{4.9}$$

证明 $F_y \in X^*$,并求 $\| F_y \|$.

证 由内积的定义易知 F_y 为 X 上的线性泛函. 由 Cauchy-Schwarz 不等式,对 $\forall\, x \in X$,有

$$|F_y(x)| = |(x, y)| \leqslant \| y \| \, \| x \|,$$

故 F_y 是有界线性泛函,即 $F_y \in X^*$,且有 $\| F_y \| \leqslant \| y \|$.

若 $y = \theta$,显然 $F_y = 0$,且 $\| F_y \| = \| y \| = 0$.

不妨设 $y \neq \theta$,因 $F_y(y) = (y, y) = \| y \|^2$,故

$$\begin{aligned} \| F_y \| &= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \frac{|F_y(x)|}{\| x \|} \\ &\geqslant \frac{|F_y(y)|}{\| y \|} = \| y \|, \end{aligned}$$

从而有 $\quad \| F_y \| = \| y \|$.

称(4.9)式定义的 F_y 为由 y 通过内积导出的有界线性泛函.

当 H 是 Hilbert 空间时,H 上的有界线性泛函具有什么形式呢?对此有著名的 F.Riesz 表示定理,该定理给出了 Hilbert 空间上有界线性泛函的一般形式.

定理2.2(F.Riesz表示定理)　设H为Hilbert空间,F为H上的有界线性泛函,则必有惟一的$y \in H$,使得对任一$x \in H$,有$F(x) = (x,y)$,且$\|F\| = \|y\|$.

证　若$F = 0$,则取$y = \theta$即可.

设$F \neq 0$,此时F的零空间$M = N(F)$为H的闭线性子空间,且$M \neq H$.由投影定理可知$H = M \oplus M^{\perp}$,从而$M^{\perp} \neq \{\theta\}$,即存在$y_1 \in M^{\perp}, y_1 \neq \theta$,显然$F(y_1) \neq 0$.令$y_2 = \dfrac{y_1}{F(y_1)}$,则$y_2 \in M^{\perp}$,且$F(y_2) = 1$.

对$\forall x \in H$,有

$$F(x - F(x)y_2) = F(x) - F(x)F(y_2) = 0,$$

故$x - F(x)y_2 \in M$,因此$(x - F(x)y_2, y_2) = 0$,

即　$(x, y_2) - F(x)\|y_2\|^2 = 0$,

从而　$F(x) = \left(x, \dfrac{y_2}{\|y_2\|^2}\right)$,取$y = \dfrac{y_2}{\|y_2\|^2}$,则有

$$F(x) = (x,y) \ (\forall x \in H).$$

下证惟一性.若存在$z \in H$,使得$F(x) = (x,z)(\forall x \in H)$,则有$(x,y) = (x,z)$,即$(x, y - z) = 0(\forall x \in H)$,由$x$的任意性便知$z = y$.

由例2.1知$\|F\| = \|y\|$.

F.Riesz表示定理说明Hilbert空间上的有界线性泛函都可以看成是由空间中某向量y通过内积导出的有界线性泛函F_y.

下面我们利用F.Riesz表示定理来介绍Hilbert空间的另一重要特性——自共轭性.

已知Hilbert空间H和它的共轭空间H^*都是Banach空间,作映射$T: H \to H^*$为

$$Tu = F_u \quad (\forall u \in H), \tag{4.10}$$

其中 F_u 为由 u 通过内积导出的有界线性泛函.

由 F.Riesz 表示定理可知 T 是双射,且是 H 到 H^* 的保范算子,即 $\|Tu\| = \|u\|(\forall u \in H)$.

对 $\forall u, v \in H, \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ 及 $\forall x \in H$,有

$$\begin{aligned} F_{\lambda u+\mu v}(x) &= (x, \lambda u + \mu v) \\ &= \bar{\lambda}(x, u) + \bar{\mu}(x, v) \\ &= \bar{\lambda}F_u(x) + \bar{\mu}F_v(x) \\ &= (\bar{\lambda}F_u + \bar{\mu}F_v)(x), \end{aligned}$$

故 $T(\lambda u + \mu v) = F_{\lambda u+\mu v} = \bar{\lambda}F_u + \bar{\mu}F_v = \bar{\lambda}Tu + \bar{\mu}Tv$,这说明当 H 是实空间时,T 为线性算子,由第三章定义 3.3 知,H 与 H^* 同构.

而当 H 是复空间时,T 是双射,T 是保范算子,但 T 不是线性算子,而是共轭线性算子,此时称 H 与 H^* 复共轭线性同构.

不论 H 是实空间还是复空间,我们将 $u \in H$ 与 $F_u \in H^*$ 看成是一致的,即把向量 u 看成泛函 F_u,也把泛函 F_u 看成向量 u,这样 H 与 H^* 就"同一化"了,在这个意义下,我们称 H 是**自共轭的**. 但要注意,对于数 $\lambda \in \boldsymbol{K}$ 和向量 $u \in H$,当把 λu 看成泛函时,它在 $x \in H$ 处的值是泛函 u(即 F_u)在 x 处的值乘以 $\bar{\lambda}$.

由前述可知,当 H 是实空间时,H 和 H^* 就完全一致了(同构意义下,$H = H^*$),因此对于实 Hilbert 空间 $\boldsymbol{R}^n, l^2, L^2[a,b]$,有 $(\boldsymbol{R}^n)^* = \boldsymbol{R}^n, (l^2)^* = l^2, (L^2[a,b])^* = L^2[a,b]$,它们都是自共轭的,这与第三章 §3 中的有关结果是一致的.

例 2.2 设 H 为无限维可分的 Hilbert 空间,F 为 H 上的有界线性泛函,求 F 及 F.Riesz 表示定理中 y 的具体表示形式.

解 由定理 1.12,1.13 可知 H 中有由可数个向量构成的完全标准正交系 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$,且对 $\forall x \in H$,有 $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$.

因 F 是连续线性泛函，所以

$$\begin{aligned}F(x) &= F\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right)\\&= \lim_{n\to\infty}F\left(\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right)\\&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)F(e_k)\\&= \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)F(e_k).\end{aligned}$$

下面证明 $\sum_{k=1}^{\infty}|F(e_k)|^2<+\infty$.

令 $h_n=\sum_{k=1}^{n}\overline{F(e_k)}e_k\ (n=1,2,\cdots)$，则

$$F(h_n)=\sum_{k=1}^{n}|F(e_k)|^2=\|h_n\|^2\ (n=1,2,\cdots).$$

另一方面，$|F(h_n)|^2\leqslant\|F\|^2\|h_n\|^2=\|F\|^2F(h_n)$，故 $|F(h_n)|\leqslant\|F\|^2$，即 $\sum_{k=1}^{n}|F(e_k)|^2\leqslant\|F\|^2\ (n=1,2,\cdots)$，从而 $\sum_{k=1}^{\infty}|F(e_k)|^2<+\infty$.

因此，由定理 1.14，$\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F(e_k)}e_k\in H$. 利用内积的连续性，有 $\left(x,\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F(e_k)}e_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)F(e_k)=F(x)\ (\forall x\in H)$，记 $y=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F(e_k)}e_k$，则 y 即为所求.

习 题 4.2

1. 设 F 为 Hilbert 空间 C^n 上的有界线性泛函，求 F 的具体表示形式.

2. 设 F 为 Hilbert 空间 l^2 上的有界线性泛函,求 F 的具体表示形式.

3. 设 F 为复 Hilbert 空间 $L^2[a,b]$ 上的有界线性泛函,求 F 的具体表示形式.

4. 设 H 为 Hilbert 空间,$\{x_n\}\subset H, x\in H$,证明 $x_n \xrightarrow{W} x$ 的充要条件是:对 $\forall y\in H, (x_n,y)\to(x,y)$.

5. 设 H 为 Hilbert 空间,$\{x_n\}\subset H, x\in H$,证明 $x_n \xrightarrow{S} x$ 的充要条件是:$x_n \xrightarrow{W} x$ 且 $\|x_n\|\to\|x\|$.

6. 设 H 为 Hilbert 空间,证明 H 的共轭空间 H^* 仍是一个 Hilbert 空间,H^* 中的内积定义为

$$(F_u,F_v)=\overline{(u,v)}=(v,u)\quad(\forall F_u,F_v\in H^*),$$

其中 $$F_u(x)=(x,u),F_v(x)=(x,v)\quad(\forall x\in H).$$

§3 Hilbert 空间上的伴随算子和自伴算子

§3.1 伴随算子

定理3.1 设 H,G 为 Hilbert 空间,$T\in B(H,G)$,则存在惟一的算子 $S\in B(G,H)$,使得对 $\forall x\in H,\forall y\in G$,有

$$(Tx,y)=(x,Sy).\tag{4.11}$$

证 对任意固定的 $y\in G$,令 $F_y(x)=(Tx,y)(\forall x\in H)$,由于 T 是线性算子,易知 F_y 是 H 上的线性泛函. 又因对 $\forall x\in H$,有

$$\begin{aligned}|F_y(x)|&=|(Tx,y)|\leqslant\|Tx\|\,\|y\|\\&\leqslant\|T\|\,\|x\|\,\|y\|,\end{aligned}\tag{4.12}$$

故 F_y 是 H 上的有界线性泛函. 由 F.Riesz 表示定理,存在惟一的元素,记作 $y^*\in H$,使得 $F_y(x)=(x,y^*)(\forall x\in H)$,即 F_y 为由 y^* 通过内积导出的有界线性泛函,且 $\|F_y\|=\|y^*\|$.

作映射 $S:G\to H$ 为

$$Sy = y^* \quad (\forall y \in G), \tag{4.13}$$

则对 $\forall x\in H,\forall y\in G$,有$(Tx,y)=(x,Sy)$.

现证 $S\in B(G,H)$. 对 $\forall y_1,y_2\in G,\forall\lambda,\mu\in\boldsymbol{K},\forall x\in H$,有

$$\begin{aligned}(x,S(\lambda y_1+\mu y_2)) &= (Tx,\lambda y_1+\mu y_2)\\ &= \bar{\lambda}(Tx,y_1)+\bar{\mu}(Tx,y_2)\\ &= \bar{\lambda}(x,Sy_1)+\bar{\mu}(x,Sy_2)\\ &= (x,\lambda Sy_1+\mu Sy_2),\end{aligned}$$

因此 $S(\lambda y_1+\mu y_2)=\lambda Sy_1+\mu Sy_2$,即 S 为线性算子.

由(4.12)式可知 $\|F_y\|\leqslant\|T\|\,\|y\|$,故对 $\forall y\in G$,有

$$\|Sy\| = \|y^*\| = \|F_y\| \leqslant \|T\|\,\|y\|,$$

因此 S 为有界线性算子,且 $\|S\|\leqslant\|T\|$,即 $S\in B(G,H)$.

最后证明惟一性. 设有 $S_1\in B(G,H)$,使得

$$(Tx,y)=(x,S_1y)\ (\forall x\in H,\forall y\in G),$$

则由(4.11)式,有$(x,Sy-S_1y)=0$,由 x 的任意性,$Sy-S_1y=\theta(\forall y\in G)$,故 $S=S_1$. 惟一性得证.

由上述定理,引入下面的定义.

定义 3.1 设 H,G 为 Hilbert 空间,$T\in B(H,G)$,称满足(4.11)式的惟一的有界线性算子 $S\in B(G,H)$ 为 T 的**伴随算子**(或**共轭算子**),记作 $S=T^*$.

由定义可知,对 $\forall x\in H,\forall y\in G$,有

$$(Tx,y)=(x,T^*y). \tag{4.14}$$

例3.1 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为Hilbert空间 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个完全标准正交系,T 是$\boldsymbol{C}^n$ 到$\boldsymbol{C}^n$ 的线性算子,由第三章例2.6知 $T\in B(\boldsymbol{C}^n)$,求 T^*.

解 由第三章例1.8,对于 $\boldsymbol{C}^n$ 的基$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 而言,T 由一

个 n 阶矩阵所惟一确定,设 T 对应的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,即

$$Te_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j\ (i=1,2,\cdots,n).$$

由定义 3.1,$T^*\in B(\boldsymbol{C}^n)$,设 T^* 对应的矩阵为 $B=(b_{ij})_{n\times n}$,即

$$T^*e_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ji}e_j\ (i=1,2,\cdots,n).$$

下面求 $B=(b_{ij})_{n\times n}$. 由于 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是标准正交系,故

$$(Te_i,e_j)=a_{ji},$$

$$(T^*e_i,e_j)=b_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

由(4.14)式,应有

$$(Te_i,e_j)=(e_i,T^*e_j)\ (i,j=1,2,\cdots,n),$$

因此,对于 $i,j=1,2,\cdots,n$,有

$$\begin{aligned}b_{ji}&=(T^*e_i,e_j)=\overline{(e_j,T^*e_i)}\\&=\overline{(Te_j,e_i)}=\overline{a_{ij}},\end{aligned}$$

即 $b_{ij}=\overline{a_{ji}}(i,j=1,2,\cdots,n)$,从而有 $B=\overline{A}^T$,即 B 为 A 的共轭转置.

类似地,在 Hilbert 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中,设 $T\in B(\boldsymbol{R}^n)$,取定 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个完全标准正交系,设 T 对应的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,则 T^* 对应的矩阵为 A 的转置矩阵 A^T. 这个结果与第三章例 5.3 中当 $m=n$ 时的结果一致.

例 3.2 设 $\{\alpha_n\}$ 为一有界复数列,定义 $T:l^2\to l^2$ 为

$$Tx=(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\cdots,\alpha_nx_n,\cdots)$$

$$(\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^2),$$

证明 $T\in B(l^2)$,并求 T^*.

证 设 $|\alpha_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$,容易验证 T 为线性算子,且对 $\forall x\in l^2$,有 $\|Tx\|_2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_nx_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant M\|x\|_2$,故 $T\in$

$B(l^2)$,且 $\|T\| \leqslant M$.

下面求 T^*. 对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots), y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^2$,有

$$(x,T^*y)=(Tx,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n x_n)\bar{y}_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{(\bar{\alpha}_n y_n)},$$

由 x 的任意性知 $T^*y=(\bar{\alpha}_1 y_1,\bar{\alpha}_2 y_2,\cdots,\bar{\alpha}_n y_n,\cdots)$ ($\forall y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in l^2$).

下面介绍伴随算子的一些性质.

定理 3.2 设 H,G 为 Hilbert 空间,$T\in B(H,G)$,则

(1) $(T^*)^*=T$; (2) $\|T^*\|=\|T\|$;

(3) $\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$.

证 (1) 已知 $T\in B(H,G)$,故 $T^*\in B(G,H)$,$(T^*)^*\in B(H,G)$. 对 $\forall x\in H,\forall y\in G$,由于 $(y,Tx)=\overline{(Tx,y)}=\overline{(x,T^*y)}=(T^*y,x)=(y,(T^*)^*x)$,故 $(T^*)^*=T$.

(2) 由定理 3.1 知 $\|T^*\|\leqslant\|T\|$,由(1)的结果,又有 $\|T\|=\|(T^*)^*\|\leqslant\|T^*\|$,故 $\|T^*\|=\|T\|$.

(3) 注意到 $T^*T\in B(H)$,$TT^*\in B(G)$,由 Cauchy-Schwarz 不等式,对 $\forall x\in H$,有

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2=(Tx,Tx)&=(x,T^*Tx)\\&\leqslant\|T^*Tx\|\,\|x\|\\&\leqslant\|T^*T\|\,\|x\|^2,\end{aligned}$$

故 $\|T\|^2\leqslant\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\,\|T\|=\|T\|^2$,从而

$$\|T^*T\|=\|T\|^2.$$

由此,有

$$\|TT^*\|=\|(T^*)^*T^*\|=\|T^*\|^2=\|T\|^2,$$

因此 $$\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2.$$

定理 3.3 设 H,G,L 为 Hilbert 空间.

(1) 若 $T_1,T_2\in B(H,G)$,$\lambda,\mu\in\boldsymbol{K}$,则 $(\lambda T_1+\mu T_2)^*=\bar{\lambda}T_1^*+\bar{\mu}T_2^*$;

(2) 若 $T \in B(H,G)$, $S \in B(G,L)$,则$(ST)^* = T^* S^*$;

(3) 若 $T \in B(H,G)$,T 为H 到G 的双射,则$(T^*)^{-1}$ 存在,$(T^*)^{-1} \in B(H,G)$,且$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

证 (1) 对 $\forall x \in H, \forall y \in G$,由于

$$\begin{aligned}((\lambda T_1 + \mu T_2)x, y) &= \lambda(T_1 x, y) + \mu(T_2 x, y)\\ &= \lambda(x, T_1^* y) + \mu(x, T_2^* y)\\ &= (x, (\bar{\lambda} T_1^* + \bar{\mu} T_2^*)y),\end{aligned}$$

所以
$$(\lambda T_1 + \mu T_2)^* = \bar{\lambda} T_1^* + \bar{\mu} T_2^*.$$

(2) 注意到 $ST \in B(H,L)$,对 $\forall x \in H, \forall z \in L$,有 $(STx, z) = (Tx, S^* z) = (x, T^* S^* z)$,故$(ST)^* = T^* S^*$.

(3) 由 Banach 逆算子定理,T 的逆算子 T^{-1} 存在且是有界线性算子,即 $T^{-1} \in B(G,H)$. 由定义 3.1 知$(T^{-1})^*$ 存在,且$(T^{-1})^* \in B(H,G)$.

对 $\forall x, y \in H$,由于

$$\begin{aligned}(x, T^*(T^{-1})^* y) &= (Tx, (T^{-1})^* y)\\ &= (T^{-1}Tx, y)\\ &= (x, y),\end{aligned}$$

所以 $T^*(T^{-1})^* = I_H$,此处 I_H 为H 上的恒等算子.

另一方面,对 $\forall u, v \in G$,由于

$$\begin{aligned}(u, (T^{-1})^* T^* v) &= (T^{-1}u, T^* v)\\ &= (TT^{-1}u, v)\\ &= (u, v),\end{aligned}$$

所以$(T^{-1})^* T^* = I_G$,此处 I_G 为G 上的恒等算子.

综上所述可知$(T^*)^{-1}$ 存在,且

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \in B(H,G).$$

定理 3.4 设 H 为 Hilbert 空间,$T \in B(H)$,则 T 的零空间 $N(T)$ 与值域 $R(T)$ 和 T^* 的零空间 $N(T^*)$ 与值域 $R(T^*)$ 之

间有下列关系：

(1) $N(T) = R(T^*)^{\perp}$； (2) $\overline{R(T)} = N(T^*)^{\perp}$.

证 (1) 设 $x \in N(T)$，则 $Tx = \theta$. 对 $\forall y \in H$，由于 $(Tx, y) = (x, T^* y) = 0$，故 $x \perp R(T^*)$，即 $x \in R(T^*)^{\perp}$，从而 $N(T) \subset R(T^*)^{\perp}$.

反之，设 $x \in R(T^*)^{\perp}$，即 $x \perp R(T^*)$，对 $\forall y \in H$，因 $(Tx, y) = (x, T^* y) = 0$，故 $Tx = \theta$，即 $x \in N(T)$，从而 $R(T^*)^{\perp} \subset N(T)$，由此知(1) 成立.

(2) 由(1) 的结果知 $N(T^*) = R((T^*)^*)^{\perp} = R(T)^{\perp}$，由于 $\overline{R(T)}$ 为 H 的闭线性子空间，由本章习题 4.1 的第 8,9 题知 $N(T^*)^{\perp} = (R(T)^{\perp})^{\perp} = (\overline{R(T)}^{\perp})^{\perp} = \overline{R(T)}$，故(2) 成立.

§3.2 自伴算子

定义 3.2 设 H 为 Hilbert 空间，$T \in B(H)$，由定义 3.1，$T^* \in B(H)$，如果 $T^* = T$，则称 T 为**自伴算子**(或**自共轭算子**).

由定义，若 T 为自伴算子，则对 $\forall x, y \in H$，有

$$(Tx, y) = (x, Ty). \tag{4.15}$$

在例 3.1 中，当 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $\overline{A}^T = A$ 时(此时称 A 为 Hermite 矩阵)，有 $T^* = T$，即 T 为自伴算子. 因此，自伴算子是 Hermite 矩阵在 Hilbert 空间中的推广，自伴算子与 Hermite 矩阵有许多相似的性质，有关这点在本章 §5 中将会看得更加清楚.

在例 3.2 中，当 $\{\alpha_n\}$ 为一有界实数列时，有 $T^* = T$，即 T 为自伴算子.

下面介绍自伴算子的性质.

定理 3.5 设 H 为 Hilbert 空间，$\{T_n\} \subset B(H)$，$T \in B(H)$，如果 $\{T_n\}$ 是自伴算子列，且 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T，则 T 也是自伴算子.

证 由定理 3.2 和 3.3,有

$$\| T_n^* - T^* \| = \| (T_n - T)^* \| = \| T_n - T \| \ (n = 1,2,\cdots).$$

由 $B(H)$ 中的三角不等式,得

$$\begin{aligned} \| T^* - T \| &\leqslant \| T^* - T_n^* \| + \| T_n^* - T_n \| + \| T_n - T \| \\ &= \| T_n^* - T^* \| + 0 + \| T_n - T \| \\ &= 2 \| T_n - T \| \to 0, \end{aligned}$$

故 $\| T^* - T \| = 0$,即 $T^* = T$,因此 T 是自伴算子.

定理 3.6 设 H 为复 Hilbert 空间,$T \in B(H)$,则 T 是自伴算子的充要条件是对任一 $x \in H$,(Tx,x) 为实数.

证 必要性 设 T 为自伴算子,对 $\forall x \in H$,有

$$(Tx,x) = (x,Tx) = \overline{(Tx,x)},$$

故(Tx,x)为实数.

充分性 设对 $\forall x \in H$,(Tx,x) 为实数,则

$$(Tx,x) = \overline{(Tx,x)} = (x,Tx). \tag{4.16}$$

容易验证,对 $\forall x,y \in H$,下面的等式恒成立(类似于定理 1.3(2),也称为极化恒等式):

$$(Tx,y) = \frac{1}{4}[(T(x+y),x+y) - (T(x-y),x-y) + i(T(x+iy),x+iy) - i(T(x-iy),x-iy)]. \tag{4.17}$$

由(4.16)及(4.17)式,对 $\forall x,y \in H$,有

$$(Tx,y) = \frac{1}{4}[(x+y,T(x+y)) - (x-y,T(x-y)) + i(x+iy,T(x+iy)) - i(x-iy,T(x-iy))],$$

经直接验算,便知$(Tx,y) = (x,Ty)$,即 $T^* = T$,故 T 是自伴算子.

例 3.3 在复 Hilbert 空间 $L^2[0,1]$ 上,定义 $T:L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ 为 $Tx(t) = tx(t)(\forall x(t) \in L^2[0,1])$(称 T 为乘法算

子)，证明 T 是自伴算子.

证 容易验证 T 是 $L^2[0,1]$ 到 $L^2[0,1]$ 的线性算子，且对 $\forall x(t)\in L^2[0,1]$，有

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2 &= \left(\int_0^1 t^2|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2,\end{aligned}$$

故 $\|T\|\leqslant 1$，即 $T\in B(L^2[0,1])$.

对 $\forall x(t)\in L^2[0,1]$，因 $(Tx(t),x(t)) = \int_0^1 tx(t)\overline{x(t)}\mathrm{d}t$ $= \int_0^1 t|x(t)|^2\mathrm{d}t$ 为实数，由定理 3.6，T 是自伴算子.

例 3.4 设 H 为复 Hilbert 空间，$T\in B(H)$，证明 T 可表示为 $T = T_1 + iT_2$，其中 $T_1, T_2\in B(H)$ 为自伴算子.

证 由定义 3.1，$T^*\in B(H)$，令

$$T_1 = \frac{T+T^*}{2},\quad T_2 = \frac{T-T^*}{2i},$$

显然 $T_1, T_2\in B(H)$.

由定理 3.2 和 3.3 知，

$$T_1^* = \frac{1}{2}T^* + \frac{1}{2}(T^*)^* = \frac{T^*+T}{2} = T_1,$$

$$T_2^* = -\frac{1}{2i}(T^* - (T^*)^*) = \frac{T-T^*}{2i} = T_2,$$

因此 T_1, T_2 都是自伴算子，且 $T = T_1 + iT_2$.

通常称 T_1, T_2 分别为 T 的实部和虚部，$T = T_1 + iT_2$ 类似于复数 $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$ 的表达式.

例 3.5 这里举下面的例子说明定理 3.6 在实 Hilbert 空间中不成立.

设 T 是由矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$所确定的 $\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的线性算子(必有界),即 $Tx = Ax(\forall x = (x_1, x_2)^T \in \boldsymbol{R}^2)$,则对 $\forall x = (x_1, x_2)^T \in \boldsymbol{R}^2$, $Tx = (x_2, -x_1)^T$,故$(Tx, x) = x_1x_2 - x_1x_2 = 0$,因此对 $\forall x \in \boldsymbol{R}^2$, (Tx, x) 为实数.

另一方面,由例 3.1 可知,T 的伴随算子 T^* 是由 $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$所确定的从 $\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的线性算子,故 $T^* \neq T$,即 T 不是自伴算子.

类似地,由本例可以说明,在实 Hilbert 空间 H 中,下式不恒成立(其中 T 为有界线性算子):

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}[(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)] \quad (\forall x, y \in H),$$

但容易验证,当 T 是实 Hilbert 空间上的自伴算子时,上式恒成立.

习　题　4.3

1. 设 H 为 Hilbert 空间,I,0 分别为 H 上的恒等算子和零算子,求 I^*, 0^*.

2. 定义 $T: l^2 \to l^2$ 为

$$Tx = (0, x_1, x_2, \cdots)(\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2),$$

证明 $T \in B(l^2)$,并求 T^*.

3. 设$\{\alpha_n\}$为一有界复数列,定义 $T: l^2 \to l^2$ 为

$$Tx = (0, 0, \alpha_1x_1, \alpha_2x_2, \cdots)\ (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2),$$

证明 $T \in B(l^2)$,并求 T^*.

4. 设 H 为 Hilbert 空间,$T \in B(H)$,令 $S = I + T^*T$,证明 S 是单射,即 $N(S) = \{\theta\}$.

5. 设 H 为 Hilbert 空间,$T \in B(H)$ 为自伴算子,对任意 $n \geqslant 2(n \in \boldsymbol{N})$,证明 T^n 也是自伴算子.

6. 设 H 为 Hilbert 空间，$S,T\in B(H)$ 为自伴算子，证明 ST 为自伴算子的充要条件是 $ST=TS$.

7. 设 H 为复 Hilbert 空间，$T\in B(H)$，证明 $T^*=-T$ 的充要条件是对任意 $x\in H$，$\mathrm{Re}(Tx,x)=0$.

8. 设 H 为复 Hilbert 空间，$T\in B(H)$，证明

$$\rho(T^*)=\{\bar{\lambda}\mid\lambda\in\rho(T)\},$$
$$\sigma(T^*)=\{\bar{\lambda}\mid\lambda\in\sigma(T)\}.$$

§4 Hilbert 空间上的几种算子

除了上节介绍的自伴算子外，本节简要地介绍 Hilbert 空间上另外几种重要的有界线性算子及其性质，这些算子有着广泛的应用.

§4.1 投影算子

设 H 为 Hilbert 空间，M 为 H 的闭线性子空间(按 H 中的内积，M 本身也是 Hilbert 空间)，由投影定理，对 $\forall x\in H$，有惟一的正交分解式

$$x=x_0+x_1,\text{其中 } x_0\in M,x_1\in M^{\perp},$$

这里 x_0 称为 x 在 M 上的投影.

定义映射 $P:H\to M$ 为

$$Px=x_0,\tag{4.18}$$

即 Px 为 x 在 M 上的投影.

定义 4.1 称(4.18)式所定义的映射 P 为 H 到 M 上的**投影算子**. 有时为了标出 P 和 M 的关系，记 P 为 P_M.

定理 4.1 设 H 为 Hilbert 空间，M 为 H 的闭线性子空间，P 是 H 到 M 上的投影算子，则 $P\in B(H)$，且 $\|P\|=0$ 或 1.

证 对 $\forall x,y\in H,\forall\lambda,\mu\in\boldsymbol{K}$,

设 $$x = x_0 + x_1 \quad (x_0 \in M, x_1 \in M^{\perp}),$$

$$y = y_0 + y_1 \quad (y_0 \in M, y_1 \in M^{\perp}),$$

则 $$\lambda x + \mu y = (\lambda x_0 + \mu y_0) + (\lambda x_1 + \mu y_1),$$

易知 $$\lambda x_0 + \mu y_0 \in M, \lambda x_1 + \mu y_1 \in M^{\perp},$$

由定义 4.1,有

$$P(\lambda x + \mu y) = \lambda x_0 + \mu y_0 = \lambda Px + \mu Py,$$

即 P 为线性算子.

另外,对 $\forall x \in H, x = x_0 + x_1 = Px + x_1$,且 $Px \perp x_1$,由勾股定理,$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x_1\|^2$,故 $\|Px\| \leqslant \|x\|$,从而 P 是有界线性算子,即 $P \in B(H)$,且 $\|P\| \leqslant 1$.

下证 $\|P\| = 0$ 或 1.

若 $M = \{\theta\}$,则对 $\forall x \in H, Px = \theta$,即 P 为零算子,故 $\|P\| = 0$.

若 $M \neq \{\theta\}$,则存在 $x_0 \in M, x_0 \neq \theta$,这时 $Px_0 = x_0$,故 $\|P\| = \sup\limits_{\substack{x \in H \\ x \neq \theta}} \dfrac{\|Px\|}{\|x\|} \geqslant \dfrac{\|Px_0\|}{\|x_0\|} = 1$,前面已知 $\|P\| \leqslant 1$,故 $\|P\| = 1$.

例 4.1 设 H 为 Hilbert 空间,$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 H 中的一个标准正交系,$M = \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,由于 M 是有限维的,由第三章推论 1.1 知 M 是 H 的闭线性子空间.对 $\forall x \in H$,试求 $P_M x$ 的表示式.

解 由投影定理,对 $\forall x \in H$,有 $x = x_0 + x_1$,其中 $x_0 \in M, x_1 \in M^{\perp}$.

因 $x_0 \in M = \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,可设 $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$,则对 $\forall k (1 \leqslant k \leqslant n), (x, e_k) = (x_0 + x_1, e_k) = (x_0, e_k) = \lambda_k$,故

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k,$$

由定义 4.1 知

$$P_M x = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k \quad (\forall\, x \in H).$$

下面的定理刻画了投影算子的特征.

定理 4.2 设 H 为 Hilbert 空间,$P \in B(H)$,则 P 是投影算子的充要条件是:(1) P 是自伴算子;(2) P 是幂等算子(即 $P^2 = P$).

证 必要性 设 P 是 H 到 M 上的投影算子(此处 M 为 H 的某个闭线性子空间),对 $\forall\, x, y \in H$,设

$$x = Px + x_1 (Px \in M, x_1 \in M^{\perp}),$$

$$y = Py + y_1 (Py \in M, y_1 \in M^{\perp}),$$

则有

$$\begin{aligned}(Px, y) &= (Px, Py + y_1) = (Px, Py)\\ &= (Px + x_1, Py) = (x, Py),\end{aligned}$$

故 $P^* = P$,即 P 是自伴算子.

又对 $\forall\, x \in H$,因 $Px \in M$,故 $P(Px) = Px$,即 $P^2 = P$,P 为幂等算子.

充分性 设 P 是 H 上的有界线性算子,且 $P^* = P = P^2$.

记 $M = N(I - P) = \{x \in H \mid (I - P)x = \theta\}$,这里 I 为 H 上的恒等算子,因 $I - P \in B(H)$,故 M 为 H 的闭线性子空间,下证 P 是 H 到 M 上的投影算子.

事实上,对 $\forall\, x \in H$,由于

$$(I - P)Px = Px - P^2 x = Px - Px = \theta,$$

故 $Px \in M$.

对 $\forall\, x \in H$,作分解 $x = Px + (x - Px)$,因 P 是自伴算子,故 $I - P$ 也是自伴算子($(I - P)^* = I^* - P^* = I - P$),因此对

$\forall y \in M$,有

$$(x - Px, y) = ((I - P)x, y) = (x, (I - P)y)$$
$$= (x, \theta) = 0,$$

即 $x - Px \perp M$,因此有正交分解式 $x = Px + (x - Px)$,其中 $Px \in M$, $x - Px \in M^{\perp}$,由定义 4.1, $Px = P_M x (\forall x \in H)$,即 $P = P_M$, P 是 H 到 M 上的投影算子.

例 4.2 设 H 为 Hilbert 空间, P_L, P_M 为两个投影算子,证明 $P_L P_M$ 为投影算子的充要条件是 $P_L P_M = P_M P_L$.

证 必要性 记 $P = P_L P_M$,则 $P \in B(H)$.

若 P 为投影算子,则由定理 4.2,有 $P^* = P$.

因
$$P^* = (P_L P_M)^* = P_M^* P_L^* = P_M P_L,$$

故 $P_L P_M = P_M P_L$.

充分性 设 $P_L P_M = P_M P_L$,记 $P = P_L P_M$,则

$$P^* = (P_L P_M)^* = P_M^* P_L^*$$
$$= P_M P_L = P_L P_M = P,$$

即 P 为自伴算子.

又因

$$P^2 = (P_L P_M)(P_L P_M) = P_L P_L P_M P_M$$
$$= P_L^2 P_M^2 = P_L P_M = P,$$

故 P 为幂等算子,由定理 4.2, P 是投影算子.

§4.2 酉算子

定义 4.2 设 H 为 Hilbert 空间, $U \in B(H)$,若 $U^* U = UU^* = I$,此处 I 为 H 上的恒等算子,则称 U 为**酉算子**.

例 4.3 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为正交矩阵(即 $A^T A = AA^T = E$, E 为 n 阶单位阵), T 是由 A 确定的由 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的线性算子,即 $Tx = Ax (\forall x \in \boldsymbol{R}^n)$,则 T 是酉算子.

证 由第三章例2.6知 $T \in B(\boldsymbol{R}^n)$. 由上节例3.1, T^* 对应的矩阵为 A^T, 即 $T^* x = A^T x (\forall x \in \boldsymbol{R}^n)$, 故对 $\forall x \in \boldsymbol{R}^n$, $T^* Tx = T^* Ax = A^T Ax = Ex = x, TT^* x = TA^T x = AA^T x = Ex = x$, 即 $T^* T = TT^* = I$, 故 T 为酉算子.

类似地, 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为酉矩阵(即 $\bar{A}^T A = A\bar{A}^T = E$), T 是由 A 确定的从 $\boldsymbol{C}^n$ 到 $\boldsymbol{C}^n$ 的线性算子, 则 T 是酉算子.

由本例可见, 酉算子是线性代数中正交变换和酉变换在 Hilbert 空间中的推广.

定理4.3 设 H 为 Hilbert 空间, $U \in B(H)$, 则 U 是酉算子的充要条件是: (1) U 是满射; (2) U 是保范算子, 即对任一 $x \in H$, $\| Ux \| = \| x \|$.

证 必要性 设 U 是酉算子, 则对 $\forall x \in H$, $\| Ux \|^2 = (Ux, Ux) = (x, U^* Ux) = (x, x) = \| x \|^2$, 即 $\| Ux \| = \| x \|$, 故 U 是保范算子.

另外, 由酉算子的定义易知 U 是满射, 也是单射, 且 U 存在逆算子 $U^{-1} = U^*$.

充分性 设 U 是满射, 且是保范算子, 则对 $\forall x \in H$, $\| Ux \|^2 = \| x \|^2$.

由极化恒等式, 当 H 为实空间时, 对 $\forall x, y \in H$, 有

$$
\begin{aligned}
(Ux, Uy) &= \frac{1}{4}[\| U(x+y) \|^2 - \| U(x-y) \|^2] \\
&= \frac{1}{4}[\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2] \\
&= (x, y).
\end{aligned}
$$

当 H 为复空间时, 对 $\forall x, y \in H$, 有

$$
\begin{aligned}
(Ux, Uy) = \frac{1}{4}[&\| U(x+y) \|^2 - \| U(x-y) \|^2 \\
&+ i \| U(x+iy) \|^2 - i \| U(x-iy) \|^2]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2] = (x,y).$$

因此,$((U^*U-I)x,y) = (U^*Ux,y)-(x,y) = (Ux,Uy)-(x,y) = (x,y)-(x,y) = 0$,由 x,y 的任意性,$U^*U-I=0$,即 $U^*U=I$.

因 U 是保范算子,故对 $\forall x,y\in H, x\neq y$,有 $\|Ux-Uy\| = \|U(x-y)\| = \|x-y\| > 0$,故 U 是单射,由假定 U 是满射,所以 U 是 H 到 H 的双射,因此 U^{-1} 存在,且有

$$UU^* = UU^*(UU^{-1}) = U(U^*U)U^{-1} = UIU^{-1} = UU^{-1} = I,$$

故 $U^*U = UU^* = I$,即 U 为酉算子.

例 4.4 设 $\{\alpha_n\}$ 为模为 1 的复数列,定义 $T:l^2\to l^2$ 为 $Tx = (\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\cdots)(\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2)$,证明 T 是酉算子.

证 由上节例 3.2,$T\in B(l^2)$,且有

$T^*x = (\bar{\alpha}_1x_1,\bar{\alpha}_2x_2,\cdots)\ (\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2)$.

由假设,$|\alpha_n| = 1\ (n=1,2,\cdots)$,故对 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$,有

$$T^*Tx = T^*(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\cdots) = (\bar{\alpha}_1\alpha_1x_1,\bar{\alpha}_2\alpha_2x_2,\cdots) = (x_1,x_2,\cdots) = x,$$

以及

$$TT^*x = T(\bar{\alpha}_1x_1,\bar{\alpha}_2x_2,\cdots) = (\alpha_1\bar{\alpha}_1x_1,\alpha_2\bar{\alpha}_2x_2,\cdots) = (x_1,x_2,\cdots) = x,$$

故 $T^*T = TT^* = I$,即 T 为酉算子.

例 4.5 定义 $U:L^2[-\pi,\pi]\to L^2[-\pi,\pi]$ 为

$$Ux(t)=e^{it}x(t)\quad(\forall\, x(t)\in L^2[-\pi,\pi]),$$

证明 U 是酉算子.

证 容易验证 U 是线性算子,且对 $\forall\, x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$,

$\|Ux\|_2=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|e^{it}x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|_2$,故 U 是有界线性算子,且是保范算子.

对 $\forall\, x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$,令 $y(t)=e^{-it}x(t)$,则 $y(t)\in L^2[-\pi,\pi]$,且 $Uy(t)=e^{it}y(t)=e^{it}e^{-it}x(t)=x(t)$,故 U 是满射,由定理 4.3,U 是酉算子.

另法 由前述知 $U\in B(L^2[-\pi,\pi])$. 对 $\forall\, x(t),y(t)\in L^2[-\pi,\pi]$,有

$$(Ux,y)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{it}x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\overline{e^{-it}y(t)}\mathrm{d}t$$

$$=(x(t),e^{-it}y(t))=(x,U^*y),$$

故 $U^*y(t)=e^{-it}y(t)\quad(\forall\, y(t)\in L^2[-\pi,\pi])$.

因此,对 $\forall\, x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$,有

$$U^*Ux(t)=U^*e^{it}x(t)=e^{-it}e^{it}x(t)=x(t),$$

$$UU^*x(t)=Ue^{-it}x(t)=e^{it}e^{-it}x(t)=x(t),$$

故 $U^*U=UU^*=I$,由定义知 U 是酉算子.

§4.3 正常算子

定义 4.3 设 H 为 Hilbert 空间,$T\in B(H)$,若 $T^*T=TT^*$(称 T^* 与 T 可交换),则称 T 为**正常算子或正规算子**.

由定义可知,前面介绍过的自伴算子、投影算子和酉算子都是正常算子.

例 4.6 设 H 为复 Hilbert 空间,$T=4iI$,此处 I 是 H 上的恒等算子,则 T 是正常算子,但 T 不是自伴算子,也不是酉算子.

证 由于 $T^*=-4iI$,故 $T^*T=TT^*=16I$,即 T 是正常

算子.然而,$T^* \neq T$,T 不是自伴算子,显然 T 也不是酉算子.

例 4.7 设 H 为 Hilbert 空间,M 是 H 的闭线性子空间,P 是 H 到 M 上的投影算子,Q 是 H 到 $M^{\perp}$ 上的投影算子,对任意 $\lambda,\mu \in \boldsymbol{K}$,令 $T = \lambda P + \mu Q$,则 T 是正常算子.

证 因 P,Q 是自伴算子,故 $T^* = \bar{\lambda}P + \bar{\mu}Q$.由投影算子的定义易知,对 $\forall x \in H$,$PQx = QPx = \theta$,即 $PQ = QP = 0$,又因 P,Q 是幂等算子,从而

$$\begin{aligned} T^* T &= (\bar{\lambda}P + \bar{\mu}Q)(\lambda P + \mu Q) \\ &= |\lambda|^2 P + \bar{\lambda}\mu PQ + \bar{\mu}\lambda QP + |\mu|^2 Q \\ &= |\lambda|^2 P + |\mu|^2 Q \\ &= (\lambda P + \mu Q)(\bar{\lambda}P + \bar{\mu}Q) = TT^*, \end{aligned}$$

故 T 是正常算子.

易知,只有当 λ,μ 都是实数时,T 才是自伴算子.以上两例说明自伴算子类是正常算子类的真子集.

例 4.8 设 H 为 Hilbert 空间,$T \in B(H)$ 为正常算子,证明 $\|T^2\| = \|T\|^2$.

证 因 $T^* T = TT^*$,故对 $\forall x \in H$,$\|x\| = 1$,有

$$\begin{aligned} \|T^* Tx\|^2 &= (T^* Tx, T^* Tx) \\ &= (Tx, TT^* Tx) = (Tx, T^* T^2 x) \\ &= (T^2 x, T^2 x) = \|T^2 x\|^2, \end{aligned}$$

故
$$\|T^* Tx\| = \|T^2 x\|,$$

因此有
$$\sup_{\|x\|=1} \|T^* Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|T^2 x\|,$$

由第三章定理 2.4 即知 $\|T^* T\| = \|T^2\|$,再由本章定理 3.2,有

$$\|T^* T\| = \|T\|^2,$$

故
$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

定理 4.4 设 H 为 Hilbert 空间,$\{T_n\} \subset B(H)$,$T \in B(H)$,

如果$\{T_n\}$是正常算子列,且$\{T_n\}$一致收敛于T,则T也是正常算子.

证 对$\forall n\geqslant 1$,因$T_n^*T_n = T_nT_n^*$,故

$$
\begin{aligned}
\|T^*T - TT^*\| &\leqslant \|T^*T - T_n^*T_n\| + \|T_n^*T_n - TT^*\| \\
&= \|T^*T - T_n^*T_n\| + \|T_nT_n^* - TT^*\| \\
&\leqslant \|T^*T - T_n^*T\| + \|T_n^*T - T_n^*T_n\| \\
&\quad + \|T_nT_n^* - TT_n^*\| + \|TT_n^* - TT^*\| \\
&\leqslant \|T^* - T_n^*\|\,\|T\| + \|T_n^*\|\,\|T - T_n\| \\
&\quad + \|T_n - T\|\,\|T_n^*\| + \|T\|\,\|T_n^* - T^*\| \\
&= 2\|T\|\,\|T_n - T\| + 2\|T_n\|\,\|T_n - T\|,
\end{aligned}
$$

因$\{T_n\}$一致收敛于T,故$\{\|T_n\|\}$为一有界数列,由上式令$n\to\infty$,得$\|T^*T - TT^*\|\to 0$,即$\|T^*T - TT^*\| = 0$,故$T^*T = TT^*$,因此T是正常算子.

下面的定理给出了正常算子的一个特征刻画.

定理 4.5 设H为Hilbert空间,$T\in B(H)$,则T是正常算子的充要条件为对任意$x\in H$,$\|T^*x\| = \|Tx\|$.

证 必要性 设T是正常算子,则对$\forall x\in H$,有

$$
\begin{aligned}
\|Tx\|^2 &= (Tx, Tx) = (x, T^*Tx) = (x, TT^*x) \\
&= (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2,
\end{aligned}
$$

故

$$\|T^*x\| = \|Tx\|.$$

充分性 设对$\forall x\in H$,$\|T^*x\| = \|Tx\|$.

当H是实空间时,对$\forall x,y\in H$,有

$$
\begin{aligned}
(Tx, Ty) &= \frac{1}{4}[\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2] \\
&= \frac{1}{4}[\|T^*(x+y)\|^2 - \|T^*(x-y)\|^2] \\
&= (T^*x, T^*y).
\end{aligned}
$$

当H是复空间时,对$\forall x,y\in H$,有

$$
\begin{aligned}
(Tx,Ty) &= \frac{1}{4}[\,\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 \\
&\quad + i\|T(x+iy)\|^2 - i\|T(x-iy)\|^2] \\
&= \frac{1}{4}[\,\|T^*(x+y)\|^2 - \|T^*(x-y)\|^2 \\
&\quad + i\|T^*(x+iy)\|^2 - i\|T^*(x-iy)\|^2] \\
&= (T^*x, T^*y).
\end{aligned}
$$

因此，不论 H 是实空间还是复空间，对 $\forall x,y \in H$，都有 $(Tx,Ty) = (T^*x,T^*y)$，从而

$$
\begin{aligned}
((T^*T - TT^*)x,y) &= (T^*Tx,y) - (TT^*x,y) \\
&= (Tx,Ty) - (T^*x,T^*y) = 0,
\end{aligned}
$$

由 x,y 的任意性，得 $T^*T - TT^* = 0$，即 $T^*T = TT^*$，因此 T 是正常算子.

习　题　4.4

1. 设 H 为 Hilbert 空间，P,Q 是两个投影算子，证明 $R(P) \perp R(Q)$ 的充要条件是 $PQ = QP = 0$.

2. 设 H 为 Hilbert 空间，$H \neq \{\theta\}$，$U \in B(H)$ 为酉算子，求 $\|U\|$.

3. 设 H 为 Hilbert 空间，U,V 是酉算子，证明 UV 也是酉算子.

4. 设 H 为 Hilbert 空间，$T \in B(H)$，证明 $T^* + T$ 是正常算子.

5. 设 H 为 Hilbert 空间，$T \in B(H)$ 为正常算子，对任意 $\lambda \in \boldsymbol{K}$，证明 $\lambda T, \lambda I - T$ 都是正常算子.

6. 设 $\{\alpha_n\}$ 为一有界复数列，定义 $T: l^2 \to l^2$ 为 $Tx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots)(\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2)$，证明 T 是正常算子.

7. 设 H 为 Hilbert 空间，T 是自伴算子，如对任意 $x \in H$，有 $(Tx,x) \geqslant 0$，则称 T 是正算子. 证明(1) 若 T 是自伴算子，则 T^2 是正算子；(2) 若 $T \in B(H)$，则 T^*T, TT^* 都是正算子.

8. 设 H 为 Hilbert 空间，$T \in B(H)$，$\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$，且 $|\lambda| = |\mu| = 1$，证明 $\lambda T + \mu T^*$ 是正常算子.

9. 设 H 为 Hilbert 空间，$T \in B(H)$ 为正常算子，证明对任意自然数 n，

有 $\| T^{n+1} \| = \| T^* T^n \|$.

10. 设 H 为 Hilbert 空间,$S, T \in B(H)$ 为正常算子,且满足 $ST^* = T^* S$ 和 $S^* T = TS^*$,证明 $S + T$ 与 ST 都是正常算子.

§5 Hilbert 空间上自伴算子的谱性质

在上一章 §7 中介绍了有界线性算子的谱的概念和基本性质,这些性质对于 Hilbert 空间上的有界线性算子自然也成立. 由于 Hilbert 空间上的自伴算子是一类特殊的有界线性算子,它有着较为广泛的应用,其谱也具有一些特殊的性质. 本节对 Hilbert 空间上的自伴算子的谱性质作个简要介绍.

例 5.1 在复 Hilbert 空间 $L^2[0,1]$ 上,定义 $T: L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ 为

$$Tx(t) = tx(t) \quad (\forall x(t) \in L^2[0,1]),$$

由本章例 3.3 知 T 是自伴算子,求 $\sigma_p(T)$.

解 设 $\lambda \in \boldsymbol{C}$,因 $(\lambda I - T)x(t) = (\lambda - t)x(t)$,故当 $\lambda \notin [0,1]$ 时,由 $(\lambda I - T)x(t) = 0$ 知 $x(t) \equiv 0$,即 $\lambda I - T$ 是单射,因此当 $\lambda \notin [0,1]$ 时,$\lambda \notin \sigma_p(T)$.

若 $\lambda \in [0,1]$,由 $(\lambda I - T)x(t) = 0$ 知 $x(t) = 0$ (a.e.),即 $x(t)$ 为 $L^2[0,1]$ 中的零元素($L^2[0,1]$ 中两个几乎处处相等的函数看成同一函数),此时 $\lambda I - T$ 也是单射,即 $\lambda \in [0,1]$ 时,$\lambda \notin \sigma_p(T)$. 因此 $\sigma_p(T) = \phi$.

此例说明 Hilbert 空间上的自伴算子可以没有点谱(特征值).

但是,如果自伴算子 T 有特征值,则有下述定理.

定理 5.1 设 H 为复 Hilbert 空间,$H \neq \{\theta\}$,$T \in B(H)$ 为自伴算子,则

(1) T 的所有特征值都是实数,即 $\sigma_p(T) \subset \boldsymbol{R}$;

(2) 对应于 T 的不同特征值的特征向量是正交的.

证 (1) 设 $\lambda \in \sigma_p(T)$，x 是对应的特征向量($x \neq \theta$)，则 $Tx = \lambda x$，因 T 是自伴算子，故

$$\begin{aligned}\lambda(x,x) &= (\lambda x, x) = (Tx, x) \\ &= (x, Tx) = (x, \lambda x) \\ &= \bar{\lambda}(x,x),\end{aligned}$$

由于$(x,x) = \|x\|^2 > 0$，因此 $\lambda = \bar{\lambda}$，即 $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

(2) 设 $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$，$\lambda \neq \mu$，$x$ 和 y 是对应的特征向量，则 $Tx = \lambda x$，$Ty = \mu y$. 由(1)知 $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$，利用 T 是自伴算子，得

$$\begin{aligned}\lambda(x,y) &= (\lambda x, y) = (Tx, y) \\ &= (x, Ty) = (x, \mu y) \\ &= \mu(x,y),\end{aligned}$$

因 $\lambda \neq \mu$，所以$(x,y) = 0$，即 x 与 y 是正交的.

注:本定理将线性代数中关于实对称矩阵(Hermite 矩阵)的特征值及特征向量的有关性质推广到了 Hilbert 空间上的自伴算子情形(假如有特征值).

为了证明自伴算子 T 的谱是实数子集($\sigma(T) \subset \boldsymbol{R}$)，先研究 T 的正则集 $\rho(T)$ 的特征.

定理 5.2 设 H 为复 Hilbert 空间，$H \neq \{\theta\}$，$T \in B(H)$ 为自伴算子，则 $\lambda \in \rho(T)$ 的充要条件是存在常数 $c > 0$，使得对任一 $x \in H$，有

$$\|(\lambda I - T)x\| \geqslant c\|x\|. \tag{4.19}$$

证 必要性 设 $\lambda \in \rho(T)$，由正则点的定义知，$(\lambda I - T)^{-1}$ 存在且是 $R(\lambda I - T)$ 到 H 的有界线性算子. 令 $m = \|(\lambda I - T)^{-1}\|$，则 $m > 0$. 由于$(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T) = I$，故对 $\forall x \in H$，有

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)x\| \\ &\leqslant m\|(\lambda I - T)x\|.\end{aligned}$$

令 $c = \frac{1}{m}$,则

$$\|(\lambda I - T)x\| \geqslant \frac{1}{m}\|x\| = c\|x\| (\forall x \in H).$$

充分性　假设(4.19)式成立,要证 $\lambda \in \rho(T)$,为此先证明(1) $\lambda I - T$ 是单射;(2) $\overline{R(\lambda I - T)} = H$;(3) $R(\lambda I - T)$ 是 H 中的闭集.

(1) 若 $(\lambda I - T)x = \theta$,由(4.19)式知 $x = \theta$,即 $\lambda I - T$ 是单射,因此 $\lambda \notin \sigma_p(T)$.

(2) 设 $x_0 \perp \overline{R(\lambda I - T)}$,则 $x_0 \perp R(\lambda I - T)$,因此对 $\forall x \in H$,有

$$0 = ((\lambda I - T)x, x_0) = \lambda(x, x_0) - (Tx, x_0),$$

因 T 是自伴算子,故 $(Tx, x_0) = (x, Tx_0)$,由上式得

$$(x, \bar{\lambda}x_0) = (x, Tx_0),$$

由 x 的任意性知 $Tx_0 = \bar{\lambda}x_0$.

如果 $x_0 \neq \theta$,则 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T)$,由定理5.1,$\bar{\lambda} \in \boldsymbol{R}$,即 $\bar{\lambda} = \lambda \in \sigma_p(T)$,这与(1)矛盾,因此 $x_0 = \theta$.

上述结果表明 $\overline{R(\lambda I - T)}^{\perp} = \{\theta\}$,由习题4.1第9题的结果知 $\overline{R(\lambda I - T)} = (\overline{R(\lambda I - T)}^{\perp})^{\perp} = \{\theta\}^{\perp} = H$,即 $R(\lambda I - T)$ 在 H 中稠密.

(3) 设 $y \in \overline{R(\lambda I - T)}$,要证 $y \in R(\lambda I - T)$.

因 $y \in \overline{R(\lambda I - T)}$,故存在 $\{y_n\} \subset R(\lambda I - T)$,使得 $y_n \to y$,设 $y_n = (\lambda I - T)x_n, x_n \in H$,由(4.19)式,有

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \frac{1}{c}\|(\lambda I - T)(x_m - x_n)\|$$

$$= \frac{1}{c}\|y_m - y_n\| \to 0 (\text{当 } m, n \to \infty \text{ 时}),$$

因此 $\{x_n\}$ 为 H 中的Cauchy列,由于 H 完备,故存在 $x \in H$,使得

$x_n \to x$.

因 T 连续,$\lambda I - T$ 也连续,故$(\lambda I - T)x_n \to (\lambda I - T)x$,即 $y_n \to (\lambda I - T)x$, 已知 $y_n \to y$,由极限的惟一性,有

$$y = (\lambda I - T)x \in R(\lambda I - T),$$

故 $R(\lambda I - T)$ 为 H 中的闭集,由(2) 知,

$$R(\lambda I - T) = \overline{R(\lambda I - T)} = H.$$

综合上述可知,$\lambda I - T \in B(H)$,且是双射,由 Banach 逆算子定理,$(\lambda I - T)^{-1}$ 存在且$(\lambda I - T)^{-1} \in B(H)$,由正则点的定义知 $\lambda \in \rho(T)$.

定理 5.3 设 H 为复 Hilbert 空间,$H \neq \{\theta\}$,$T \in B(H)$ 为自伴算子,则 T 的谱是实数子集,即 $\sigma(T) \subset \boldsymbol{R}$.

证 只要证明 $\lambda = \alpha + i\beta(\beta \neq 0)$ 属于 $\rho(T)$ 即可.

对 $\forall x \in H, x \neq \theta$,记 $y = (\lambda I - T)x$,则

$$\begin{aligned}(x,y) - (y,x) &= (x,(\lambda I - T)x) - ((\lambda I - T)x,x) \\ &= (x,\lambda x) - (x,Tx) - (\lambda x,x) + (Tx,x) \\ &= \bar{\lambda}(x,x) - \lambda(x,x) \\ &= -2i\beta \|x\|^2,\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式,得

$$\begin{aligned}2|\beta| \|x\|^2 &\leqslant |(x,y)| + |(y,x)| \\ &\leqslant 2\|x\| \|y\| \\ &= 2\|x\| \|(\lambda I - T)x\|,\end{aligned}$$

即 $$\|(\lambda I - T)x\| \geqslant |\beta| \|x\| \quad (\forall x \in H, x \neq \theta).$$

当 $x = \theta$ 时,上式显然成立,由定理 5.2 可知,若 $\beta \neq 0$,则 $\lambda \in \rho(T)$,因此 $\sigma(T) \subset \boldsymbol{R}$.

定理 5.4 设 H 为复 Hilbert 空间,$H \neq \{\theta\}$,$T \in B(H)$ 为自伴算子,记

$$M = \sup_{\|x\|=1}(Tx,x), \quad m = \inf_{\|x\|=1}(Tx,x), \qquad (4.20)$$

则 T 的谱 $\sigma(T)\subset[m,M]$.

证 由定理5.3,$\sigma(T)\subset\boldsymbol{R}$,为此只要证明对任意实数 λ,当 $\lambda>M$ 与 $\lambda<m$ 时,$\lambda\in\rho(T)$ 即可.

下面仅就 $\lambda>M$ 时予以证明,当 $\lambda<m$ 时类似地可以证明.

设 $\lambda>M$,对 $\forall x\in H$,由 Cauchy-Schwarz 不等式,有

$$|((\lambda I-T)x,x)|\leqslant\|(\lambda I-T)x\|\,\|x\|. \tag{4.21}$$

由 M 的定义,对 $\forall x\in H, x\neq\theta$ 时,有

$$\left(T\left(\frac{x}{\|x\|}\right),\frac{x}{\|x\|}\right)\leqslant M,$$

即 $(Tx,x)\leqslant M\|x\|^2$,此式对 $x=\theta$ 也成立.

因
$$\begin{aligned}((\lambda I-T)x,x)&=\lambda(x,x)-(Tx,x)\\&\geqslant\lambda\|x\|^2-M\|x\|^2\\&=(\lambda-M)\|x\|^2,\end{aligned}$$

由(4.21)式,得 $\|(\lambda I-T)x\|\,\|x\|\geqslant(\lambda-M)\|x\|^2$,由此推出

$$\|(\lambda I-T)x\|\geqslant(\lambda-M)\|x\|\quad(\forall x\in H),$$

此处 $\lambda-M>0$,由定理5.2,$\lambda\in\rho(T)$.

定理5.5 设 H 为Hilbert空间,$T\in B(H)$ 为自伴算子,则

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|. \tag{4.22}$$

证 令 $k=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$,对 $\forall x\in H$,$\|x\|=1$,有

$$\begin{aligned}|(Tx,x)|&\leqslant\|Tx\|\,\|x\|\\&\leqslant\|T\|\,\|x\|^2\\&=\|T\|.\end{aligned}$$

故 $k\leqslant\|T\|$.下证 $\|T\|\leqslant k$.

因 T 是自伴算子,对 $\forall x,y\in H$,经直接验算,可知下面的(4.23)与(4.24)两式成立:

当 H 是实空间时,有

$$(Tx,y)=\frac{1}{4}[(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)];\tag{4.23}$$

当 H 是复空间时,有

$$\mathrm{Re}(Tx,y)=\frac{1}{4}[(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)].\tag{4.24}$$

另一方面,对 $\forall x\in H(x\neq\theta)$,由 k 的定义,有

$$\left|\left(T\left(\frac{x}{\|x\|}\right),\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\leqslant k,$$

即
$$|(Tx,x)|\leqslant k\|x\|^2,\tag{4.25}$$

上式对 $x=\theta$ 也成立.

若 H 是实空间,对 $\forall x,y\in H$,由(4.23),(4.25)及平行四边形公式,得

$$\begin{aligned}|(Tx,y)|&\leqslant\frac{k}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)\\&=\frac{k}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

若 H 是复空间,对 $\forall x,y\in H$,由(4.24),(4.25)及平形四边形公式,得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Tx,y)&\leqslant|\mathrm{Re}(Tx,y)|\\&\leqslant\frac{k}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

因此,对 $\forall x,y\in H$, $\|x\|=\|y\|=1$,若 H 是实空间,则 $|(Tx,y)|\leqslant k$;若 H 是复空间,则 $\mathrm{Re}(Tx,y)\leqslant k$.

当 H 是复空间时,令 $(Tx,y)=e^{i\theta}|(Tx,y)|$,当 $\|x\|=\|y\|=1$ 时,因 $\|e^{-i\theta}x\|=1$,由前面的结论知,$\mathrm{Re}(T(e^{-i\theta}x),y)\leqslant k$,即 $\mathrm{Re}(e^{-i\theta}(Tx,y))=|(Tx,y)|\leqslant k$.

综合上述得知,不论 H 是实空间还是复空间,对 $\forall x,y\in H$,

$\|x\| = \|y\| = 1$,有

$$|(Tx,y)| \leqslant k. \tag{4.26}$$

对任意固定的 $x \in H$, $\|x\| = 1$,令 $F(y) = (y, Tx)(\forall y \in H)$,则 $F \in H^*$,且 $\|F\| = \|Tx\|$,从而由(4.26)式,有

$$\begin{aligned}\|Tx\| = \|F\| &= \sup_{\|y\|=1} |F(y)| \\ &= \sup_{\|y\|=1} |(y, Tx)| \\ &= \sup_{\|y\|=1} |(Ty, x)| \leqslant k,\end{aligned}$$

因此 $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leqslant k$,前面已证 $k \leqslant \|T\|$,

故 $\|T\| = k$.

例 5.2 设 T 是由矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 确定的从 $\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的线性算子,即 $Tx = Ax(\forall x = (x_1, x_2)^T \in \boldsymbol{R}^2)$,则 $T \in B(\boldsymbol{R}^2)$,易知对 $\forall x \in \boldsymbol{R}^2$,有 $(Tx, x) = 0$,从而 $\sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| = 0$,但 $T \neq 0$,所以 $\|T\| \neq 0$,这时(4.22)式不再成立.注意到 $T^* x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(\forall x \in \boldsymbol{R}^2)$,因此 $T^* \neq T$,即 T 不是自伴算子.

此例表明,对于非自伴算子,(4.22)式一般不再成立.

利用定理5.5,进一步可以证明定理5.4中的 $M, m \in \sigma(T)$,即有如下定理.

定理 5.6 假设条件同定理 5.4,则 $M, m \in \sigma(T)$.

证 注意到对任一 $\alpha > 0$, $T + \alpha I$ 是自伴算子,由定理5.4可知 $\sigma(T + \alpha I) \subset [m + \alpha, M + \alpha]$.因此,不失一般性,可设 $0 \leqslant m \leqslant M$,这时由定理5.5知 $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| = M$.下证 $M \in \sigma(T)$.

因 $M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x)$,由上确界的性质,对于任意取定的正数数列 $\{\delta_n\}$, $\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$,存在点列 $\{x_n\} \subset H$, $\|x_n\| = 1$,使得

$$(Tx_n, x_n) > M - \delta_n \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由于 $\|Tx_n\| \leqslant \|T\| \|x_n\| = \|T\| = M$,所以有

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Mx_n\|^2 &= (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2M(Tx_n, x_n) + M^2\|x_n\|^2 \\ &\leqslant M^2 - 2M(M - \delta_n) + M^2 \\ &= 2M\delta_n \to 0 (n \to \infty),\end{aligned}$$

因此,不存在常数 $c > 0$,使得对所有的 x_n,有

$$\|Tx_n - Mx_n\| \geqslant c\|x_n\| = c \text{ 成立},$$

由定理 5.2 立即推出 $M \notin \rho(T)$,即 $M \in \sigma(T)$.

类似地可以证明 $m \in \sigma(T)$.

定理 5.7 设 H 为复 Hilbert 空间,$T \in B(H)$ 为自伴算子,则 T 的剩余谱 $\sigma_r(T) = \phi$.

证 反证法 设 $\sigma_r(T) \neq \phi$,则存在 $\lambda \in \sigma_r(T)$,由剩余谱的定义(见上一章 §7),$\lambda I - T$ 为单射,且 $R(\lambda I - T)$ 在 H 中不稠密,即 $\overline{R(\lambda I - T)} \neq H$.

因 $\overline{R(\lambda I - T)}$ 为 H 的闭线性子空间,由投影定理,有空间分解

$$\begin{aligned}H &= \overline{R(\lambda I - T)} \oplus \overline{R(\lambda I - T)}^{\perp} \\ &= \overline{R(\lambda I - T)} \oplus R(\lambda I - T)^{\perp},\end{aligned}$$

由于 $\overline{R(\lambda I - T)} \neq H$,故 $R(\lambda I - T)^{\perp} \neq \{\theta\}$,因此存在 $y \neq \theta$,$y \perp R(\lambda I - T)$,即对 $\forall x \in H$,有

$$((\lambda I - T)x, y) = 0.$$

因 $\lambda \in \sigma_r(T) \subset \sigma(T) \subset \mathbf{R}$,$T$ 是自伴算子,故

$$((\lambda I - T)x, y) = (x, (\lambda I - T)^* y) = (x, (\lambda I - T)y) = 0,$$

由 x 的任意性知 $(\lambda I - T)y = \theta (y \neq \theta)$,这表明 $\lambda I - T$ 不是单射,即 $\lambda \in \sigma_p(T)$,这与假设 $\lambda \in \sigma_r(T)$ 矛盾,故 $\sigma_r(T) = \phi$.

例 5.3 在复 Hilbert 空间 l^2 上,定义 $T: l^2 \to l^2$ 为

$$Tx = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \cdots, \frac{1}{n}x_n, \cdots\right)$$

$$(\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2),$$

易知 $T \in B(l^2)$,求 $\sigma_p(T), \sigma_r(T), \sigma_c(T), \sigma(T)$.

解 由上一章例7.8知,T是紧算子,由本章例3.2可知 T 是自伴算子,因此 T 是 l^2 上的紧自伴算子.

首先,由定理5.7,$\sigma_r(T) = \phi$.

其次,由上一章例7.8,得知

$$\sigma(T) = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\},$$

$$\sigma_p(T) = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\},$$

因 $\sigma_p(T), \sigma_r(T), \sigma_c(T)$ 互不相交,由此便知 $\sigma_c(T) = \{0\}$.

例5.4 设有界实数列$\{\alpha_n\}$在$[-1,1]$中稠密,定义 $T: l^2 \to l^2$ 为

$$Tx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots) \ (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2),$$

由本章例3.2知 $T \in B(l^2)$ 且为自伴算子,证明$\{\alpha_n\} \subset \sigma_p(T)$,且 T 不是紧算子.

证 容易验证,对 $\forall \alpha_n, N(\alpha_n I - T) \neq \{\theta\}$,即 $\alpha_n I - T$ 不是单射,故 $\alpha_n \in \sigma_p(T)$,即$\{\alpha_n\} \subset \sigma_p(T)$.

由上一章定理7.3,$\sigma(T)$是闭集,由$\{\alpha_n\} \subset \sigma(T)$得$\overline{\{\alpha_n\}} \subset \overline{\sigma(T)} = \sigma(T)$,从而$[-1,1] \subset \sigma(T)$,由上一章定理7.6(5)知 T 不是紧算子.

例5.5 设 H 为复 Hilbert 空间,M 为H 的闭线性子空间,$M \neq \{\theta\}, M \neq H$,$P$ 为H 到M 上的投影算子,求 $\sigma(P)$.

解 由条件知 $P \neq I$, $\|P\| = 1$,因 P 是自伴算子,由定理5.4,易求得 $m = 0, M = 1$,故 $\sigma(P) \subset [0,1]$.

当 $\lambda = 0,1$ 时,$\lambda I - P$ 都不是单射,故0,1是点谱,即$0,1 \in$

$\sigma_p(P)$.

下证当 $0 < \lambda < 1$ 时,$\lambda \in \rho(P)$.

首先,$\lambda I - P$ 是单射.事实上,设 $x = x_0 + x_1 \in H, x_0 \in M$, $x_1 \in M^{\perp}$,使得 $(\lambda I - P)x = \theta$,即 $(\lambda - 1)x_0 + \lambda x_1 = \theta$,由于 $(\lambda - 1)x_0$ 与 λx_1 正交,由勾股定理,$(1-\lambda)^2 \| x_0 \|^2 + \lambda^2 \| x_1 \|^2 = 0$,由此知 $x_0 = x_1 = \theta$,即 $x = \theta$,故 $\lambda I - P$ 为单射.

再证 $\lambda I - P$ 是满射.对 $\forall y \in H$,设 $y = y_0 + y_1, y_0 \in M$, $y_1 \in M^{\perp}$,令 $x = \frac{y_0}{\lambda - 1} + \frac{y_1}{\lambda}$,则易验证 $(\lambda I - P)x = y$,故 $\lambda I - P$ 为满射.

因此 $\lambda I - P$ 为双射,因 $\lambda I - P \in B(H)$,H 是 Banach 空间,由 Banach 逆算子定理知 $(\lambda I - P)^{-1}$ 存在,且 $(\lambda I - P)^{-1} \in B(H)$,故 $\lambda \in \rho(P)$.

综上所述便知 $\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0,1\}$.

习　题　4.5

1. 证明:定理 5.4 中,当 $\lambda < m$ 时,$\lambda \in \rho(T)$.

2. 证明:定理 5.6 中,$m \in \sigma(T)$.

3. 设 $\{\alpha_n\}$ 为一有界实数列,记 $a = \inf_n \alpha_n, b = \sup_n \alpha_n$,定义 $T: l^2 \to l^2$ 为

$$Tx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots) \ (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2),$$

证明 $\{\alpha_n\} \subset \sigma_p(T)$,并问在什么条件下,$[a,b] \subset \sigma(T)$.

4. 设 $\{\alpha_n\} \subset \mathbf{R}, \alpha_n \neq 0 (n = 1,2,\cdots)$ 且 $\alpha_n \to 0$,定义 $T: l^2 \to l^2$ 为

$$Tx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots) \ (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2),$$

(1) 证明 T 是紧自伴算子;

(2) 求 $\sigma_p(T), \sigma(T)$.

第五章　泛函分析的一些应用

任何一门数学学科的产生和发展都与自然科学和工程技术的进步密不可分.泛函分析与其他学科一样有着丰富的来源和背景,它与数学物理中的变分原理、流体力学问题、天体形状等理论密切相关,并成为现代数学、现代物理学等的重要基础.由于受本课程内容和篇幅的限制,本章首先介绍两类不动点原理以及它们在方程理论中的应用;然后将紧算子理论用于讨论积分方程;最后用统一的泛函分析的语言和方法处理数值计算中的函数逼近问题.我们希望通过这些内容的学习,读者可以做到举一反三,将泛函分析的思想和方法用于更为具体、专门的学科或问题中去.

§1　压缩映射原理及其应用

设 X 是某一线性空间,f 是从 X 到 X 的某一映射(线性或非线性),经常遇到的问题之一是求算子方程(θ 为 X 中的零元素)

$$f(x)=\theta \tag{5.1}$$

的解.如取 $X=\boldsymbol{R}$,$f(x)$ 是 n 次多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则(5.1)就是求代数方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根.当 f 是非线性时,方程(5.1)是否有解,以及在有解的情况下是否惟一,一般并不明显,为了讨论方程(5.1)的解,常常是将方程(5.1)改为与之等价的形式

$$Tx=x. \tag{5.2}$$

这样,解方程(5.1)等价于解方程(5.2). 本节和下一节将讨论方程(5.2)的解的存在性与惟一性问题. 首先引入

定义 1.1 设 X 是一集合, T 是 X 到 X 的映射. 如果存在 $\bar{x} \in X$ 使(5.2)成立,则称 $\bar{x}$ 为映射 T 的**不动点**.

§1.1 压缩映射原理

定义 1.2 设 T 是度量空间 X 到 X 的映射,称 T 是 X 上的一个**压缩映射**,是指存在常数 $0 \leqslant \alpha < 1$ 使

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y) \quad (\forall x, y \in X). \tag{5.3}$$

压缩映射必连续. 因为当 $x_n \to x (n \to \infty)$ 时,有

$$d(Tx_n, Tx) \leqslant \alpha d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

下述定理是著名的压缩映射原理.

定理 1.1 (Banach, 1922)非空的完备度量空间 X 到 X 的任一压缩映射 T 在 X 中存在惟一的不动点.

证 存在性 对 $\forall x_0 \in X$,定义如下迭代序列

$$x_0, x_1 = Tx_0, \cdots, x_{n+1} = Tx_n, \cdots. \tag{5.4}$$

下面证明序列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列. 事实上

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leqslant \alpha d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leqslant \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leqslant \cdots \leqslant \alpha^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

由三角不等式及等比数列求和公式,对 $\forall n, p \in \mathbf{N}$ 有

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant (\alpha^{n+p-1} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n (1 - \alpha^p)}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \\ &\leqslant \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{5.5}$$

因为 $0 \leqslant \alpha < 1$,所以 $\alpha^n \to 0 (n \to \infty)$. 即有 $d(x_{n+p}, x_n) \to 0 (n$

$\to \infty, \forall p \in \mathbf{N}$)，这就证明了序列$\{x_n\}$是Cauchy列. 由$X$的完备性，存在$\bar{x} \in X$使$x_n \to \bar{x}(n \to \infty)$. 因为$T$是连续映射，所以在等式$Tx_n = x_{n+1}$两边令$n \to \infty$取极限即得

$$T\bar{x} = \bar{x}.$$

这便证明了不动点的存在性.

惟一性　设另有一个不动点$\tilde{x}$使$T\tilde{x} = \tilde{x}$，则由

$$d(\bar{x}, \tilde{x}) = d(T\bar{x}, T\tilde{x}) \leqslant \alpha d(\bar{x}, \tilde{x}) \quad (0 \leqslant \alpha < 1)$$

可知$d(\bar{x}, \tilde{x}) = 0, \bar{x} = \tilde{x}$，不动点惟一.

定理1.1不仅证明了压缩映射的不动点的存在性与惟一性，同时提供了求不动点的方法——迭代法. 任取$x_0 \in X$，作迭代序列$x_{n+1} = Tx_n(n = 0,1,2,\cdots)$，它一定收敛到$T$的不动点$\bar{x}$. 其几何意义如图5-1所示. 设$X = [0,1]$，$T$是$[0,1]$到$[0,1]$的压缩映射. T在$[0,1]$上的不动点$\bar{x}$即为函数$y = Tx$的图形与直线$y = x$的交点. 任取$x_0 \in [0,1]$，则$x_{n+1} = Tx_n(n = 0,1,2,\cdots)$愈来愈逼近于$\bar{x}$. 在(5.5)式中令$p \to \infty$得到

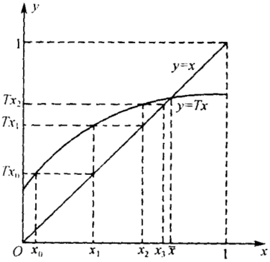


图5-1

$$d(\bar{x}, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{5.6}$$

它表示了近似解x_n逼近准确解$\bar{x}$的程度，可以作为近似求解中一个粗略的误差估计.

定理1.1可作如下推广.

定理1.2　设T是非空的完备度量空间X到X的映射，如果

存在常数 $0 \leqslant \alpha < 1$ 及某个自然数 $n(n \geqslant 2)$ 使得

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant \alpha d(x,y) \quad (\forall x, y \in X), \tag{5.7}$$

则 T 存在惟一的不动点.

证 由(5.7)知 T^n 满足定理1.1的条件,故 T^n 存在惟一的不动点 $\bar{x}$. 下面证明 $\bar{x}$ 也是 T 的惟一的不动点. 事实上,由于

$$T^n(T\bar{x}) = T^{n+1}\bar{x} = T(T^n\bar{x}) = T\bar{x},$$

故 $T\bar{x}$ 是 T^n 的一个不动点,由 T^n 不动点的惟一性知 $T\bar{x} = \bar{x}$,即 $\bar{x}$ 也是 T 的不动点.

设 T 另有一个不动点 $\tilde{x}$,则由于

$$T^n\tilde{x} = T^{n-1}(T\tilde{x}) = T^{n-1}\tilde{x} = \cdots = T\tilde{x} = \tilde{x},$$

$\tilde{x}$ 也是 T^n 的一个不动点. 由 T^n 不动点的惟一性, $\tilde{x} = \bar{x}$. 因此, T 存在惟一的不动点.

§1.2 应用举例

例1.1 当用迭代法求方程 $f(x) = e^x - x - 2 = 0$ 的最大实根时,估计近似根的误差不大于 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ 所需迭代次数.

解 由于 $f(1) = e - 3 < 0$, $f(2) = e^2 - 4 > 0$,且当 $x > 1$ 时, $f'(x) = e^x - 1 > 0$,故由连续函数介值定理及 $f(x)$ 的单增性($x > 1$ 时), $f(x)$ 的最大实根必在(1,2)内.

为用迭代法求此最大实根,将原方程化为

$$x = \ln(x+2) \triangleq \varphi(x),$$

则对任意 $x, y \in [1,2]$,由微分中值定理,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\ln(x+2) - \ln(y+2)|$$
$$= \frac{1}{\xi + 2}|x - y| < \frac{1}{3}|x - y|,$$

其中 ξ 在 x 与 y 之间,故 $\xi > 1$. 任取 $x \in [1,2]$,则 $1 < \varphi(x) = \ln(x+2) \leqslant \ln 4 < 2$. 所以, $\varphi(x)$ 是闭区间[1,2]上的压缩映射且

$\alpha = \frac{1}{3}$.由定理1.1,任取 $x_0 \in [1,2]$,迭代序列 $x_n = \varphi(x_{n-1}) = \ln(x_{n-1}+2)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 $\bar{x}$,此不动点即为 $f(x)=0$ 的最大实根.

注意到(5.6),对任意 $x_0 \in [1,2]$,

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} |x_1 - x_0| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

满足$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ 的最小正整数为 $n = 10$.所以,用迭代 $x_n = \ln(x_{n-1}+2)$ 求 $f(x)=0$ 的最大实根时,要使近似根的误差不大于$\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ 至多需迭代 10 次.

例 1.2 (常微分方程初值问题解的存在性与惟一性,Lipschitz,1876) 若函数 $f(x,y)$ 在平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中某一闭区域 D:

$$|x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b$$

上连续,且对 y 满足 Lipschitz 条件:存在常数 $L > 0$(L 称为 Lipschitz 常数),使当$(x,y),(x,\bar{y}) \in D$ 时有

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leqslant L|y - \bar{y}|,$$

则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{5.8}$$

在包含 x_0 的某一区间 $\Delta: x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 上具有惟一连续解,其中

$$0 < h < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\},\ M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|.$$

证 (5.8) 两边从 x_0 到 x 积分,则(5.8) 的求解等价于求解

积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t. \tag{5.9}$$

设 C_D 是连续函数空间 $C[x_0 - h, x_0 + h]$ 中满足 $(x, y(x)) \in D$ 且 $y(x_0) = y_0$ 的函数 $y(x)$ 全体. 不难证明 C_D 是 $C[x_0 - h, x_0 + h]$ 的闭子空间, 因而是完备的. 在 C_D 上定义映射 T:

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \quad (y(t) \in C_D).$$

显然 $(Ty)(x_0) = y_0$, 且

$$d(Ty, y_0) = \max_{|x - x_0| \leqslant h} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t \right| \leqslant Mh \leqslant b,$$

因而 $Ty \in C_D$, $T: C_D \to C_D$. 任取 $y_1(x), y_2(x) \in C_D$,

$$\begin{aligned} d(Ty_1, Ty_2) &= \max_{|x - x_0| \leqslant h} \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)))\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \max_{|x - x_0| \leqslant h} \left| \int_{x_0}^{x} L \left| y_1(t) - y_2(t) \right| \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant Lh \max_{|x - x_0| \leqslant h} \left| y_1(t) - y_2(t) \right| = Lhd(y_1, y_2). \end{aligned}$$

由于 $Lh < 1$, 故映射 T 满足定理 1.1 的全部条件. 因此, 在区间 Δ 上存在惟一连续函数 $y^*(x)$ 满足初值问题(5.8).

例 1.3 (隐函数存在定理) 设 D 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中点 (x_0, y_0) 的一个邻域, 假设 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数, 并设 $f_y(x, y)$ 在 D 中存在, 且在 (x_0, y_0) 处连续. 那么, 当 $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, $f(x_0, y_0) = 0$ 时, 则在 x_0 的某一邻域内, 存在惟一的连续函数 $y(x)$ 使得 $f(x, y(x)) = 0$ 且 $y(x_0) = y_0$.

证 考虑由

$$(T\varphi)(x) = \varphi(x) - \frac{f(x, \varphi(x))}{f_y(x_0, y_0)}$$

所确定的映射的不动点(这个映射是由牛顿法求方程的根而受到启发的,见习题5.1第4题).显然若 $y(x)$ 是 T 的不动点,则必有 $f(x,y(x))\equiv 0$.为此,首先确定含(x_0,y_0)的邻域.因为 $f(x_0,y_0)=0$,$f_y(x,y)$ 在(x_0,y_0)处连续且 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$,可取正数 ε,δ 充分小使当 $(x,y)\in D_1\triangleq\{(x,y)\,|\,|x-x_0|\leqslant\varepsilon,|y-y_0|\leqslant\delta\}\subset D$ 时,

$$\left|\frac{f_y(x,y)}{f_y(x_0,y_0)}-1\right|<\frac{1}{2},\quad\left|\frac{1}{f_y(x_0,y_0)}f(x,y_0)\right|<\frac{1}{2}\delta$$

同时成立.取 C_D 是连续函数空间 $C[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$ 满足$(x,\varphi(x))\in D_1$ 且 $\varphi(x_0)=y_0$ 的完备子空间.则当 $\varphi(x),\psi(x)\in C_D$ 时,根据微分中值定理,有

$$\begin{aligned}d(T\varphi,T\psi)&=\max_{|x-x_0|\leqslant\varepsilon}\left|(\varphi(x)-\psi(x))-\frac{1}{f_y(x_0,y_0)}\right.\\&\qquad\left.(f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x)))\right|\\&=\max_{|x-x_0|\leqslant\varepsilon}\left|(\varphi(x)-\psi(x))-\frac{1}{f_y(x_0,y_0)}\right.\\&\qquad\left.f_y(x,\xi(x))(\varphi(x)-\psi(x))\right|\\&=\max_{|x-x_0|\leqslant\varepsilon}\left|1-\frac{1}{f_y(x_0,y_0)}f_y(x,\xi(x))\right|\\&\qquad|\varphi(x)-\psi(x)|\\&\leqslant\frac{1}{2}\max_{|x-x_0|\leqslant\varepsilon}|\varphi(x)-\psi(x)|=\frac{1}{2}d(\varphi,\psi),\end{aligned}$$

其中 $\xi(x)=\varphi(x)+\theta(\psi(x)-\varphi(x))(0<\theta<1)$ 满足$(x,\xi(x))\in D_1$.剩下还需证明,当 $\varphi(x)\in C_D$ 时,$(T\varphi)(x)\in C_D$.注意到

$$\begin{aligned} d(T\varphi, y_0) &\leqslant d(T\varphi, Ty_0) + d(Ty_0, y_0) \\ &\leqslant \frac{1}{2} d(\varphi, y_0) + \max_{|x-x_0| \leqslant \varepsilon} \left| \frac{1}{f_y(x_0, y_0)} f(x, y_0) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta, \end{aligned}$$

且$(T\varphi)(x_0) = y_0 + \dfrac{1}{f_y(x_0, y_0)} f(x_0, y_0) = y_0$.

由此可知,$T: C_D \to C_D$ 为压缩映射. 由定理 **1.1** 知存在惟一的 $y(x) \in C_D$ 使$(Ty)(x) = y(x)$,即 $f(x, y(x)) \equiv 0$ 且 $y(x_0) = y_0$.

例 1.4 (解线性方程组的 Jacobi 迭代法)n 阶方阵 $A = (a_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 称为严格对角占优的,如果 $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 可以证明,当 A 是严格对角占优时 $|A| \neq 0$,因而线性方程组

$$Ax = b \ (b \in \boldsymbol{R}^n) \tag{5.10}$$

存在惟一解. 为用迭代法求解线性方程组(5.10),将 A 分解为 $A = D - B$,其中 $D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$,于是线性方程组(5.10)的求解等价于线性方程组(当 A 严格对角占优时 D^{-1} 显然存在)

$$x = D^{-1}Bx + D^{-1}b \tag{5.11}$$

的求解. 任取 $x^{(0)} \in \boldsymbol{R}^n$,构造迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = D^{-1}Bx^{(k)} + D^{-1}b \ (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{5.12}$$

称为解线性方程组(5.10)的 Jacobi 迭代法. 下面讨论这种迭代法的收敛性. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中定义距离

$$d(x, y) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i| \left(\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{R}^n \\ y &= (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in \boldsymbol{R}^n \end{aligned} \right),$$

容易证明 $\boldsymbol{R}^n$ 在此距离下是完备的. 作映射 $T: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 为

$$Tx = D^{-1}Bx + D^{-1}b \quad (\forall\, x \in \boldsymbol{R}^n).$$

则当 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\boldsymbol{R}^n$ 时,显然有

$$d(Tx,Ty)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}(x_j-y_j)\right|$$
$$\leqslant\alpha d(x,y),$$

其中 $\alpha=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1$,故 T 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的压缩映射. 由定理 1.1,迭代序列(5.12) 收敛到线性方程组(5.11) 的解,即线性方程组(5.10) 的 Jacobi 迭代法是收敛的.

例 1.5 (第二型 Fredholm 积分方程的解的存在性与惟一性) 设 $f\in L^2[a,b]$,$K(x,s)$(称为积分方程的核) 是定义在 $a\leqslant x$, $s\leqslant b$ 上的二元连续函数,并且

$$\int_a^b\int_a^b|K(x,s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s>0,$$

则对于充分小的 $|\lambda|$,λ 为常数,第二型 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s\qquad(5.13)$$

在 $L^2[a,b]$ 中存在惟一解.

证 由于 $K(x,s)$ 是连续函数,积分 $\int_a^b|K(x,s)|^2\mathrm{d}s$ 对 x 处处存在,并且

$$\int_a^b\left(\int_a^b|K(x,s)|^2\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b|K(x,s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

在 $L^2[a,b]$ 上定义映射 T:

$$(T\varphi)(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

则由 Minkowski 不等式及 Cauchy-Schwarz 不等式不难证明对任意 $\varphi\in L^2[a,b]$,

$$\int_a^b|(T\varphi)(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \left| f(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x < +\infty,$$

所以 T 将 $L^2[a,b]$ 映入 $L^2[a,b]$. 于是由 Cauchy-Schwarz 不等式,对任意 $\varphi,\psi \in L^2[a,b]$,

$$\begin{aligned} & d(T\varphi, T\psi) \\ = & |\lambda| \left(\int_a^b \left| \int_a^b K(x,s)(\varphi(s) - \psi(s))\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leqslant & |\lambda| \left(\int_a^b \left(\int_a^b |K(x,s)|^2 \mathrm{d}s \int_a^b |\varphi(s) - \psi(s)|^2 \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\ = & |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi(s) - \psi(s)|^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \\ = & |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} d(\varphi,\psi). \end{aligned}$$

因此,当

$$|\lambda| < \frac{1}{\left(\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}}} \tag{5.14}$$

时, T 满足定理 1.1 的条件. 从而,积分方程(5.13) 在 $L^2[a,b]$ 中存在惟一解.

例 1.6 (第二型 Volterra 积分方程的解的存在性与惟一性) 若 $s > x$ 时积分方程的核 $K(x,s)$ 恒等于零,则方程(5.13) 称为第二型 Volterra 积分方程,其形式为

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s, \tag{5.15}$$

其中 $f \in C[a,b]$. 下面讨论(5.15) 的连续解的存在性与惟一性. 定义 $C[a,b]$ 上的映射 T:

$$(T\varphi)(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

显然有 $(T\varphi)(x) \in C[a,b]$. 于是对任意 $\varphi,\psi \in C[a,b]$,

$$|(T\varphi)(x)-(T\psi)(x)| = |\lambda|\left|\int_a^x K(x,s)(\varphi(s)-\psi(s))\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant |\lambda| M(x-a)\max_{a\leqslant s\leqslant b}|\varphi(s)-\psi(s)|$$
$$= |\lambda| M(x-a) d(\varphi,\psi),$$

其中 $M = \max\limits_{a\leqslant x, s\leqslant b}|K(x,s)|$. 今用归纳法证明

$$|(T^n\varphi)(x)-(T^n\psi)(x)| \leqslant \frac{|\lambda|^n M^n (x-a)^n}{n!} d(\varphi,\psi). \tag{5.16}$$

事实上,$n=1$ 时(5.16)已经证明.设对自然数 n,(5.16)成立,则

$$|(T^{n+1}\varphi)(x)-(T^{n+1}\psi)(x)|$$
$$= |\lambda|\left|\int_a^x K(x,s)[(T^n\varphi)(s)-(T^n\psi)(s)]\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant |\lambda|\int_a^x |K(x,s)||(T^n\varphi)(s)-(T^n\psi)(s)|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant |\lambda| M\int_a^x \frac{|\lambda|^n M^n (s-a)^n}{n!} d(\varphi,\psi)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{|\lambda|^{n+1} M^{n+1}}{n!} d(\varphi,\psi)\int_a^x (s-a)^n \mathrm{d}s$$
$$= \frac{|\lambda|^{n+1} M^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} d(\varphi,\psi).$$

于是(5.16)得证.因此,由(5.16),

$$d(T^n\varphi, T^n\psi) = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|(T^n\varphi)(x)-(T^n\psi)(x)|$$
$$\leqslant \frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} d(\varphi,\psi).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!}$ 收敛,可取 n 充分大使

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1,$$

从而 T^n 满足定理 1.2 的全部条件.因此,对任意参数 λ,方程

(5.15) 在 $C[a,b]$ 中存在惟一解.

习　题　5.1

1. 若 $Tx = x^2 (0 < x \leqslant \frac{1}{3})$,证明 T 是 $X = \left(0, \frac{1}{3}\right]$ 上的一个压缩映射,但 T 在 X 中没有不动点,此结果说明了什么?

2. 对例 1.2 取 $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $\Delta^+ : x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$,定义 $C(\Delta^+)$ 的范数 $\| y \| = \max\{ | y(x) | e^{-\beta x} \mid x \in \Delta^+ \}$,其中 $\beta > L$ 是某一常数,证明 $C(\Delta^+)$ 为 Banach 空间,并由此证明(5.9) 在 Δ^+ 上存在惟一的连续解 $y(x)$.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在条形区域 $D: a \leqslant x \leqslant b, -\infty < y < +\infty$ 上处处连续,且存在常数 $0 < m < M$ 使在 D 中 $m \leqslant f_y(x,y) \leqslant M$,则方程 $f(x, y) = 0$ 在闭区间 $[a,b]$ 上存在惟一的连续解 $y(x)$.

4. (Newton 迭代法)设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的二次连续可微的实值函数,$\bar{x} \in (a,b)$ 使得 $f(\bar{x}) = 0, f'(\bar{x}) \neq 0$. 求证存在 $\bar{x}$ 的邻域 $U(\bar{x})$,使得对任意 $x_0 \in U(\bar{x})$,迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

是收敛的,并且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$.

5. 设函数 $f(x,y)$ 在整个平面上连续,并且满足 Lipschitz 条件,则初值问题(5.8) 当 $| x - x_0 | < \delta$(δ 满足 $\delta L < 1$) 时存在惟一连续解 $y(x)$.

6. 对例 1.5,如果进一步假设 $f \in C[a,b]$, $K(x,s)$ 在 $a \leqslant x, s \leqslant b$ 上连续,$M = \max\limits_{a \leqslant x, s \leqslant b} | K(x,s) |$. 证明,当 $| \lambda | < \frac{1}{M(b-a)}$ 时积分方程(5.13) 有惟一连续解.

7. 设 $f \in C[a,b]$, $K(x,s,u)$ 在 $G = [a,b] \times [a,b] \times \mathbf{R}$ 上连续,且在 G 上对 u 满足 Lipschitz 条件

$$| K(x,s,u_1) - K(x,s,u_2) | \leqslant L | u_1 - u_2 |.$$

证明:当 $| \lambda | < \frac{1}{L(b-a)}$ 时,非线性积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s,\varphi(s)) \mathrm{d}s$$

存在惟一连续解.

§2 不动点定理及其应用

§2.1 Brouwer 与 Schauder 不动点定理

定义 2.1 一个度量空间 X 称为具有**不动点性质**,如果每一个 X 到 X 的连续映射都有不动点.

不难证明,单位区间 $[0,1]$ 具有不动点性质.事实上,设 f 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的连续函数,如果 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$,f 已具有不动点;否则,令 $g(x)=f(x)-x(x\in[0,1])$,因为 $f(x)\in[0,1](x\in[0,1])$,必有 $g(0)=f(0)-0>0$,$g(1)=f(1)-1<0$,再由连续函数的介值定理,存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $g(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.此结果不难推广到闭区间 $[a,b]$ 上,它们是实直线上的全部紧凸子集.

上述结果有明显的几何意义.如图 5-2,因为 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的连续函数,所以 $f(x)$ 的图象在正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 内,它必与对角线 $y=x$ 相交,此交点即为不动点.但可以看出这时不动点并不一定是惟一的.

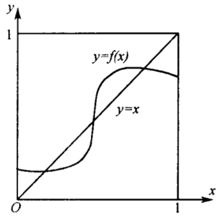


图 5-2

对空间 $\boldsymbol{R}$ 的上述结果推广到 $\boldsymbol{R}^n$ 中的单位球 $\overline{B}(x_0,1)$ 和紧凸子集 S 上并不是件容易的事.Brouwer 首先用拓扑度的方法证明了下述定理.

定理 2.1 (Brouwer,1910)(1) $\boldsymbol{R}^n$ 中的单位球 $\overline{B}(x_0;1)$ 具有不动点性质;

(2) $\boldsymbol{R}^n$ 中的每一非空紧凸子集 S 具有不动点性质.

上述定理 2.1 由 Schauder 推广到 Banach 空间的紧凸集，即定理 2.2.

定理 2.2 (Schauder, 1930) Banach 空间的任一非空紧凸子集 S 具有不动点性质.

在应用上，紧集这个条件限制较大，因为在无穷维空间中单位闭球就不是紧集，而要验证一个集是紧集往往又是相当困难的，因此我们首先引入

定义 2.2 设 X, Y 是赋范线性空间，$D \subset X$，映射 $T: D \to Y$ 称为**紧算子**，如果(1) T 是连续的；(2) T 把有界集映成列紧集.

在此定义下，Schauder 不动点定理可以改为下述形式.

定理 2.3 设 S 是 Banach 空间 X 中非空有界闭凸集，又设 $T: S \to S$ 是紧算子，则 T 在 S 上有不动点.

§2.2 应用举例

代数基本定理是代数学中一个重要而基本的定理. 它的证明方法有许多种，我们用 Brouwer 定理给出它的一个证明.

例 2.1 设 $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n (n \geqslant 1)$ 是一个复多项式，则存在 z_0 使得 $f(z_0) = 0$.

证 令 $z = re^{i\theta}, 0 \leqslant \theta < 2\pi$,

$$\alpha = 2 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|.$$

定义复平面上函数 g 如下：

$$g(z) = \begin{cases} z - \dfrac{f(z)}{\alpha e^{i(n-1)\theta}}, & |z| \leqslant 1, \\ z - \dfrac{f(z)}{\alpha z^{n-1}}, & |z| \geqslant 1. \end{cases}$$

显然 $g(z)$ 是一连续函数，且 $f(z) = 0$ 等价于 $g(z) = z$，因而原问题转化为 g 是否具有不动点. 为此考虑集合 $S = \{z \mid |z| \leqslant \alpha\}$，它是复平面上的一个紧凸集. 因此，由 Brouwer 不动点定理如能证明 g 映 S 入 S，则例 2.1 便可得证. 下面就来验证

这一断言.事实上,当$|z|\leqslant 1$时有

$$|g(z)|\leqslant|z|+\frac{|f(z)|}{\alpha}\leqslant 1+\frac{1+|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|}{\alpha}$$
$$<1+1=2\leqslant\alpha;$$

当$|z|\geqslant 1$且$z\in S$时有

$$|g(z)|=\left|z-\frac{z}{\alpha}-\frac{a_0+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}}{\alpha z^{n-1}}\right|$$
$$\leqslant|z|\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|\cdot|z|^{n-1}}{\alpha|z|^{n-1}}$$
$$\leqslant\alpha\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|}{\alpha}$$
$$=\alpha-1+\frac{\alpha-2}{\alpha}<\alpha.$$

例2.1得证.

对微分方程(5.8),当$f(x,y)$对y不满足Lipschitz条件时,是否只要$f(x,y)$连续就能保证解的存在性呢?这个问题由Peano(1890)用Euler折线法第一个给予了正面的解答,并建立了解的局部存在性定理.现在我们给出利用Schauder不动点定理对这一定理的一个证明.

例2.2 若函数$f(x,y)$在$\boldsymbol{R}^2$中某一闭区域$D=\{(x,y)\mid|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b\}$上连续,则初值问题(5.8)在区间$[x_0-h,x_0+h]$上具有连续解,此处$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$,其中$M=\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$.

证 考虑$C[x_0-h,x_0+h]$的有界子集

$$S=\{y(x)\mid y(x)\in C[x_0-h,x_0+h]且\|y-y_0\|\leqslant Mh\}$$

和S上的一个积分算子T:

$$(Ty)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))\mathrm{d}x\ (y(x)\in S).$$

显然,如果能证明 T 在 S 上存在不动点,则例 2.2 便得证.为此,先证明 S 是一个闭凸集.事实上,任取 v 个 $y_i(x)\in S(i=1,2,\cdots,v)$,那么只要 $\lambda_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{v}\lambda_i=1$,就有

$$\left\|\sum_{i=1}^{v}\lambda_i y_i(x)-y_0\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{v}\lambda_i(y_i(x)-y_0)\right\|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{v}\lambda_i Mh=Mh,$$

即 $\sum_{i=1}^{v}\lambda_i y_i(x)\in S$.因此,$S$ 是凸集.又设 $y_i(x)\in S(i=1,2,\cdots)$ 且 $y_i(x)\to\tilde{y}(x)\in C[x_0-h,x_0+h](i\to\infty)$,则由

$$\|y_i(x)-y_0\|\leqslant Mh\Rightarrow\|\tilde{y}(x)-y_0\|\leqslant Mh,$$

得 $\tilde{y}(x)\in S$.因此,S 是闭的.

其次,由 h 的定义,可证 T 映 S 到 S.事实上,对任意的 $y(x)\in S$,有

$$\|(Ty)(x)-y_0\|=\max_{|x-x_0|\leqslant h}|(Ty)(x)-y_0|$$
$$=\max_{|x-x_0|\leqslant h}\left|\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\mathrm{d}t\right|\leqslant Mh. \tag{5.17}$$

最后,证明 T 是 S 上的紧算子.为此,设 $y_i(x)(i=1,2,\cdots)$,$\tilde{y}(x)\in S$ 且 $y_i(x)\to\tilde{y}(x)(i\to\infty)$,于是对任意 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}$ 使当 $i>N$ 时有

$$|y_i(x)-\tilde{y}(x)|\leqslant\|y_i(x)-\tilde{y}(x)\|<\varepsilon,$$

因此,$y_i(x)$ 在 $C[x_0-h,x_0+h]$ 上一致收敛于 $\tilde{y}(x)$.从而由

$$(Ty_i)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_i(t))\mathrm{d}t$$

两边取极限可得

$$(Ty_i)(x)\to y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\tilde{y}(t))\mathrm{d}t=(T\tilde{y})(x)\ (i\to\infty),$$

因而 $$\begin{aligned}&|(Ty_i)(x)-(T\tilde{y})(x)|\\&=\left|\int_{x_0}^{x}(f(t,y_i(t))-f(t,\tilde{y}(t)))\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_{x_0-h}^{x_0+h}|f(t,y_i(t))-f(t,\tilde{y}(t))|\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{5.18}$$

注意到 $f(x,y)$ 在闭区域 $\{(x,y)\mid|x-x_0|\leqslant h,\ |y-y_0|\leqslant Mh\}$ 上的一致连续性及 $y_i(t)$ 一致收敛于 $\tilde{y}(t)$，由(5.18)容易证明 $(Ty_i)(x)$ 在 $[x_0-h,x_0+h]$ 上一致收敛于 $(T\tilde{y})(x)$，因而 T 在 S 上连续. 因为对任意 $y(x)\in S$ 以及任意的 $x_1,x_2\in[x_0-h,x_0+h]$ 均有

$$|(Ty)(x_1)-(Ty)(x_2)|=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t,y(t))\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x_2-x_1|,$$

所以 TS 作为定义在 $[x_0-h,x_0+h]$ 上的函数族是等度连续的，又由(5.17)这个函数族还是一致有界的，故由 Arzela-Ascoli 定理 TS 是列集的.

由定理 2.3，例 2.2 得证.

例 2.3 考察 Urysohn 积分方程

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,s,\varphi(s))\mathrm{d}s,\tag{5.19}$$

其中 $K(x,s,u)$ 是 $[a,b]\times[a,b]\times\boldsymbol{R}$ 上实值连续函数，且满足下列不等式

$$|K(x,s,u)|\leqslant c_1+c_2|u|\quad(\forall x,s\in[a,b],u\in\boldsymbol{R}),$$

其中 $c_1,c_2>0,c_2(b-a)<1$，则此积分方程必有连续解.

证 令映射 $T:C[a,b]\to C[a,b]$ 如下：

$$(T\varphi)(x)=\int_a^b K(x,s,\varphi(s))\mathrm{d}s\ (\varphi(s)\in C[a,b]).$$

则 $T:C[a,b]\to C[a,b]$ 是紧算子. 事实上，设 $S\subset C[a,b]$ 是任一有界集，即存在 $c>0$ 使 $\varphi\in S$ 时 $\|\varphi\|\leqslant c$. 因为 $K(x,s,u)$

在$[a,b]\times[a,b]\times[-c,c]$上是连续的，令

$$M=\max_{\substack{a\leqslant x,s\leqslant b,\\ -c\leqslant u\leqslant c}}|K(x,s,u)|,$$

则
$$|(T\varphi)(x)|=\left|\int_a^b K(x,s,\varphi(s))\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant\int_a^b M\mathrm{d}s=M(b-a),$$

从而 TS 中诸函数是一致有界的.

又由于 $K(x,s,u)$ 在$[a,b]\times[a,b]\times[-c,c]$上是一致连续的，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $|x_1-x_2|<\delta(x_1,x_2\in[a,b])$ 就有

$$|K(x_1,s,u)-K(x_2,s,u)|<\frac{\varepsilon}{b-a}(\forall s\in[a,b],|u|\leqslant c).$$

于是对任意 $\varphi\in S$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时恒有

$$|(T\varphi)(x_1)-(T\varphi)(x_2)|$$
$$=\left|\int_a^b[K(x_1,s,\varphi(s))-K(x_2,s,\varphi(s))]\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant\int_a^b|K(x_1,s,\varphi(s))-K(x_2,s,\varphi(s))|\mathrm{d}s$$
$$<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

这说明 TS 中诸函数还是等度连续的. 由 Arzela-Ascoli 定理，TS 是 $C[a,b]$ 中的列紧集.

再验证 T 的连续性. 设 $\varphi_n,\tilde{\varphi}\in C[a,b]$ 满足

$$\|\varphi_n-\tilde{\varphi}\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

令 $M=\sup\|\varphi_n\|<+\infty$，由 $K(x,s,u)$ 在$[a,b]\times[a,b]\times[-M,M]$上的一致连续性，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|u_1-u_2|<\delta(-M\leqslant u_1,u_2\leqslant M)$ 时，有

$$|K(x,s,u_1)-K(x,s,u_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\quad(\forall x,s\in[a,b]).$$

取 N 充分大，使当 $n > N$ 时，

$$\| \varphi_n - \tilde{\varphi} \| < \delta.$$

于是

$$\begin{aligned} & |(T\varphi_n)(x) - (T\tilde{\varphi})(x)| \\ \leqslant & \int_a^b |K(x,s,\varphi_n(s)) - K(x,s,\tilde{\varphi}(s))| \mathrm{d}s \\ < & \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \quad (\forall x \in [a,b]), \end{aligned}$$

故

$$\| T\varphi_n - T\tilde{\varphi} \| \leqslant \varepsilon,$$

因而 T 是连续映射，所以 T 是紧算子.

令 $r = \dfrac{c_1(b-a)}{1-c_2(b-a)}$，取 $C[a,b]$ 中闭球 $B = \{\varphi \mid \varphi \in C[a,b]$ 且 $\| \varphi \| \leqslant r\}$，它显然是 $C[a,b]$ 中的有界凸闭集，对任意 $\varphi \in B$，

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x)| & \leqslant \int_a^b |K(x,s,\varphi(s))| \mathrm{d}s \\ & \leqslant \int_a^b (c_1 + c_2 |\varphi(s)|) \mathrm{d}s \leqslant (c_1 + c_2 \| \varphi \|)(b-a) \\ & \leqslant (c_1 + c_2 r)(b-a) = r, \end{aligned}$$

所以 $\| T\varphi \| \leqslant r$，$TB \subset B$. 这样定理 2.3 的条件全部满足，所以 T 有不动点 $\varphi \in B$，即 Urysohn 方程有连续解.

例 2.4 设 $g:[0,b] \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 是连续的、有界的，则如下两点边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}x^2} = g(x,\varphi(x),\varphi'(x)) \ (0 \leqslant x \leqslant b), \\ \varphi(0) = \varphi(b) = 0 \end{cases} \tag{5.20}$$

有连续可微解.

证 令 $X = C^{(1)}[0,b]$ 为按下列范数

$$\| \varphi \| = \max\{ \max_{0 \leqslant x \leqslant b} |\varphi(x)|, \max_{0 \leqslant x \leqslant b} |\varphi'(x)| \}$$

所成的 Banach 空间.

不难证明求解边值问题(5.20) 等价于求解下列积分方程

$$\varphi(x) = f(\varphi)x + \int_0^x \left(\int_0^t g(s,\varphi(s),\varphi'(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t, \quad (5.21)$$

其中 $f: C^{(1)}[0,b] \to \boldsymbol{R}$ 定义为:

$$f(\varphi) = -\frac{1}{b}\int_0^b \left(\int_0^t g(s,\varphi(s),\varphi'(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t.$$

事实上,由(5.21)可知 $\varphi(0) = \varphi(b) = 0$. 且当(5.21)有连续可微解时,两边求导两次知 $\varphi(x)$ 满足方程(5.20),所以(5.21)的解是边值问题(5.20) 的连续可微解;反之,当边值问题(5.20) 有连续可微解时,对方程两边积分两次,得

$$\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x = \int_0^x \left(\int_0^t g(s,\varphi(s),\varphi'(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t,$$

将(5.20) 的边界条件代入即得方程(5.21).

下面证明,方程(5.21) 有连续可微解. 首先,容易证明 $f(\varphi)$ 是连续泛函,且

$$|f(\varphi)| \leqslant \frac{1}{b}Mb^2 = Mb,$$

其中 M 为 $g(s,\varphi(s),\varphi'(s))$ 的界, 即 $|g(s,\varphi(s),\varphi'(s))| \leqslant M(s \in [a,b])$. 定义映射 $T: C^{(1)}[0,b] \to C^{(1)}[0,b]$ 如下:

$$(T\varphi)(x) = f(\varphi)x + \int_0^x \left(\int_0^t g(s,\varphi(s),\varphi'(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t. \quad (5.22)$$

注意到

$$(T\varphi)'(x) = f(\varphi) + \int_0^x g(s,\varphi(s),\varphi'(s))\mathrm{d}s,$$

当 $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0 (n \to \infty)$ 时, $\varphi_n(x)$ 与 $\varphi_n'(x)$ 分别一致收敛于 $\varphi(x)$ 与 $\varphi'(x)$. 再由闭区间$[0,b]$上连续函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi'(x)$ 的

有界性可证$\{\varphi_n(x)\}$与$\{\varphi'_n(x)\}$均一致有界.从而由g在闭区域上的一致连续性及$f(\varphi)$的连续性,可证

$$(T\varphi_n)(x)=f(\varphi_n)x+\int_0^x\left(\int_0^t g(s,\varphi_n(s),\varphi'_n(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

$$\xrightarrow{一致} f(\varphi)x+\int_0^x\left(\int_0^t g(s,\varphi(s),\varphi'(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\quad(n\to\infty);$$

$$(T\varphi_n)'(x)=f(\varphi_n)+\int_0^x g(s,\varphi_n(s),\varphi'_n(s))\mathrm{d}s$$

$$\xrightarrow{一致} f(\varphi)+\int_0^x g(s,\varphi(s),\varphi'(s))\mathrm{d}s\quad(n\to\infty).$$

所以,T是连续映射.

对任意$\varphi\in C^{(1)}[0,b]$,有

$$\max_{x\in[0,b]}|(T\varphi)(x)|\leqslant\max_{x\in[0,b]}|f(\varphi)||x|+\max_{x\in[0,b]}\left|\int_0^x\int_0^t M\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant Mb^2+Mb^2=2Mb^2;$$

$$\max_{x\in[0,b]}|(T\varphi)'(x)|\leqslant|f(\varphi)|+\max_{x\in[0,b]}\left|\int_0^x M\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant Mb+Mb=2Mb.$$

令$r=\max\{2Mb^2,2Mb\}$,则有$\|T\varphi\|\leqslant r$.因此,如取$S=\{\varphi\,|\,\varphi\in C^{(1)}[0,b],\|\varphi\|\leqslant r\}$,则$TS\subset S$,$TS$是一致有界的.此外,对$\forall x_1,x_2\in[0,b]$,$\varphi\in S$,有

$$|(T\varphi)(x_1)-(T\varphi)(x_2)|$$

$$\leqslant Mb|x_1-x_2|+\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_0^t M\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant 2Mb|x_1-x_2|;$$

$$|(T\varphi)'(x_1)-(T\varphi)'(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|.$$

所以,TS还是等度连续的.由Arzela-Ascoli定理TS是列紧集.综合上述两点,T是紧算子,又显然S是非空有界凸闭集.由定理2.3,方程(5.22)有不动点,即边值问题(5.20)有连续可微解.

习　题　5.2

1. (1) 在 $\boldsymbol{R}$ 上 $f(x)=x+1$，则对 $x\in[0,1]$，$f(x)\neq x$；

(2) 在 $\boldsymbol{R}$ 上 $f(x)=\begin{cases}-x, x\in[-1,0]\cup(0,1];\\ \dfrac{1}{2}, x=0,\end{cases}$

则对 $x\in[-1,1]$，$f(x)\neq x$；

(3) 对于 $\boldsymbol{R}^2$ 中圆环 $S:\dfrac{1}{2}\leqslant\|x\|\leqslant 1$，设 T 为将此圆环旋转一个角度 $\theta(0<\theta<2\pi)$ 的变换，即 $Tx=T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，则对 $x\in S$，$Tx\neq x$.

上述三种情况各说明了什么？

2. 考虑非线性积分方程

$$\varphi(x)=\int_0^1 e^{-sx}\cos(\lambda\varphi(s))\mathrm{d}s\quad(0\leqslant x\leqslant 1,\lambda>0),$$

这是一个特殊的 Hammerstein 积分方程，证明它有连续解.

3. 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times\boldsymbol{R}$ 上是连续的 $(a\leqslant x_0\leqslant b)$，且存在常数 $M>0$ 使

$$|f(x,y)|\leqslant M(1+|y|),$$

则在包含 x_0 的某一邻域内，初值问题(5.8)有连续解.

4. 对于积分方程 $\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s$，其中 $K(x,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续，$f(s,u)$ 在 $[a,b]\times[-h,h]$ 上连续，

$$M_1=\max\{|K(x,s)|\,\big|\,x,s\in[a,b]\},$$

$$M_2=\max\{|f(s,u)|\,\big|\,(s,u)\in[a,b]\times[-h,h]\}.$$

证明当 λ 满足 $|\lambda|\leqslant\dfrac{h}{M_1M_2(b-a)}$ 时，以上积分方程有连续解.

5. 设 $g:[a,b]\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 是连续的、有界的，证明如下初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=g(x,\varphi(x),\varphi'(x))\ (a\leqslant x\leqslant b),\\ \varphi(a)=0,\varphi'(a)=0\end{cases}$$

有连续可微解.

§3 第二型 Fredholm 积分方程

§3.1 正则值与解核

对第二型 Fredholm 积分方程(5.13),设核 $K(x,s)$ 满足例 1.5 的条件,并令

$$M^2 = \int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s. \tag{5.23}$$

定义核算子 K 如下:

$$(K\varphi)(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s, \tag{5.24}$$

则由 Cauchy-Schwarz 不等式,对任意 $\varphi \in L^2[a,b]$,

$$\begin{aligned}
\| K\varphi \|^2 &= \int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left| \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,s)|^2 \mathrm{d}s \int_a^b |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,s)|^2 \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x \, \| \varphi \|^2 \\
&= M^2 \| \varphi \|^2,
\end{aligned}$$

所以 K 是 $L^2[a,b]$ 到 $L^2[a,b]$ 的有界线性算子,并且

$$\| K \| \leqslant M. \tag{5.25}$$

这样,积分方程(5.13) 化为如下算子方程(其中 $I: L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ 为恒等算子)

$$(I - \lambda K)\varphi = f. \tag{5.26}$$

因此,对任意 $f \in L^2[a,b]$,积分方程(5.13) 都可解的充要条件是算子 $I - \lambda K$ 的逆算子 $(I - \lambda K)^{-1}$ 存在并且有界,由此我们给出

如下定义.

定义 3.1 使逆算子$(I-\lambda K)^{-1}$存在并且有界的参数值λ称为积分方程(5.13)的**正则值**,正则值全体记作$\rho(K)$,而预解式$R_\lambda(K)=(I-\lambda K)^{-1}$称为积分方程(5.13)的**解核**.

定义 3.1 与第三章定义 7.1 稍有不同,请读者注意这一点.

容易看出,当λ满足$\|\lambda K\| = |\lambda|\,\|K\| \leqslant |\lambda|M < 1$,即$|\lambda| < \dfrac{1}{M}$时,$\lambda$是正则值,此时逆算子$(I-\lambda K)^{-1}$存在并且有界.由于

$$(I-\lambda K)^{-1} = I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \cdots,$$

因而方程(5.26)的解为

$$\begin{aligned}\varphi &= (I-\lambda K)^{-1} f\\ &= (I+\lambda K+\lambda^2 K^2+\cdots)f\\ &= f+\lambda K f+\lambda^2 K^2 f+\cdots.\end{aligned}\tag{5.27}$$

例 3.1 考虑积分方程

$$\varphi(x) = e^x + \lambda\int_0^1 s\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

此处$K(x,s)=s$, $M^2=\int_0^1\int_0^1 s^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}$,故当$|\lambda|<\sqrt{3}$时,积分方程的解为

$$\varphi(x) = e^x + \lambda K e^x + \lambda^2 K^2 e^x + \cdots.$$

由于

$$Ke^x = \int_0^1 se^s\mathrm{d}s = 1,$$

$$K^2e^x = K(Ke^x) = K1 = \int_0^1 s\mathrm{d}s = \frac{1}{2},$$

$$K^3e^x = K(K^2e^x) = K\,\frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{s}{2}\mathrm{d}s = \frac{1}{2^2},$$

一般地可用归纳法证明

$$K^n e^x = \frac{1}{2^{n-1}},$$

所以 $\varphi(x)=e^{x}+\lambda+\lambda^{2}\frac{1}{2}+\lambda^{3}\frac{1}{2^{2}}+\cdots+\lambda^{n}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

$$=e^{x}+\frac{2\lambda}{2-\lambda}\quad(|\lambda|<\sqrt{3})$$

即为原方程的解.

正则值与解核具有如下性质:

1° 正则值全体 $\rho(K)$ 是复平面上的开集.

事实上,设 $\lambda_0\in\rho(K)$,则

$$\begin{aligned}I-\lambda K&=I-\lambda_0K+(\lambda_0-\lambda)K\\&=(I-\lambda_0K)(I-(\lambda-\lambda_0)(I-\lambda_0K)^{-1}K),\end{aligned}\qquad(5.28)$$

当 $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|(I-\lambda_0K)^{-1}K\|}$ 时,$(I-\lambda K)^{-1}$ 存在且有界,所以 λ_0 是 $\rho(K)$ 的内点,由 λ_0 的任意性,$\rho(K)$ 为开集.

2° 解核有如下公式:

$$R_\lambda(K)-R_\mu(K)=(\lambda-\mu)R_\lambda(K)KR_\mu(K).\qquad(5.29)$$

事实上,由

$$\begin{aligned}(I-\lambda K)^{-1}&=(I-\lambda K)^{-1}(I-\mu K)(I-\mu K)^{-1}\\&=(I-\lambda K)^{-1}((\lambda-\mu)K+I-\lambda K)(I-\mu K)^{-1}\\&=(\lambda-\mu)(I-\lambda K)^{-1}K(I-\mu K)^{-1}+(I-\mu K)^{-1}\end{aligned}$$

即得.

3° 解核 $R_\lambda(K)$ 在 $\rho(K)$ 内是算子值解析函数.

首先,我们证明 $R_\lambda(K)$ 是 λ 的连续函数.事实上,由(5.28)及

$$\begin{aligned}\|(I-A)^{-1}\|&=\|I+A+A^2+\cdots\|\quad(\|A\|<1)\\&\leqslant1+\|A\|+\|A\|^2+\cdots=\frac{1}{1-\|A\|}\\&\leqslant2\quad(\|A\|\leqslant\frac{1}{2}),\end{aligned}$$

当 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{1}{2\|(I-\lambda_0K)^{-1}K\|}$,即 $\|(\lambda-\lambda_0)(I-\lambda_0K)^{-1}K\|$

$\leqslant \frac{1}{2}$ 时

$$
\begin{aligned}
\| R_\lambda(K) \| &= \| [I-(\lambda-\lambda_0)(I-\lambda_0 K)^{-1}K]^{-1}(I-\lambda_0 K)^{-1} \| \\
&\leqslant \| [I-(\lambda-\lambda_0)(I-\lambda_0 K)^{-1}K]^{-1} \| \, \| R_{\lambda_0}(K) \| \\
&\leqslant 2 \| R_{\lambda_0}(K) \|,
\end{aligned}
$$

再由(5.29),

$$
\begin{aligned}
&\| R_\lambda(K) - R_{\lambda_0}(K) \| \\
&\leqslant |\lambda-\lambda_0| \, \| R_\lambda(K) \| M \| R_{\lambda_0}(K) \| \\
&\leqslant 2M \| R_{\lambda_0}(K) \|^2 |\lambda-\lambda_0| \to 0 \quad (\lambda \to \lambda_0),
\end{aligned}
$$

可知 $R_\lambda(K)$ 连续.

其次证明解析性,由(5.29),

$$
\begin{aligned}
\frac{R_\lambda(K) - R_{\lambda_0}(K)}{\lambda-\lambda_0} &= R_\lambda(K)KR_{\lambda_0}(K) \\
&\to R_{\lambda_0}(K)KR_{\lambda_0}(K) \ (\lambda \to \lambda_0),
\end{aligned}
$$

故 $R_\lambda(K)$ 在 $\rho(K)$ 内处处解析.

§3.2 Fredholm 定理

首先,我们不加证明地指出当核 $K(x,s)$ 满足例 1.5 的条件时,由(5.24)定义的核算子 K 是从 $L^2[a,b]$ 到 $L^2[a,b]$ 的紧算子.

定义 3.2 设 λ 是一个复数.如果存在非零函数 $\varphi \in L^2[a,b]$,使得

$$
\varphi = \lambda K\varphi, \tag{5.31}
$$

则称 λ 是核算子 K(或核 $K(x,s)$)的**特征值**,而称 φ 为 K(相应于特征值 λ)的**特征函数**.

对照第三章 §7.1 关于特征值的定义,并由核算子 K 是从 $L^2[a,b]$ 到 $L^2[a,b]$ 的紧算子这一事实,由 Riesz-Schauder 理论

可得 Fredholm 的两条定理.

定理 3.1 在 λ 平面的任意有限区域内,第二型 Fredholm 积分方程(5.13) 只存在有限个特征值.

定理 3.2 每一个特征值至少与一个特征函数对应,与一个已知特征值相对应的且线性无关的特征函数的个数是有限的.

注意到核算子 K 的共轭算子 $K^*:L^2[a,b]\to L^2[a,b]$ 为

$$(K^*\psi)(x)=\int_a^b \overline{K(s,x)}\psi(s)\mathrm{d}s.$$

这是因为

$$\begin{aligned}(K\varphi,\psi)&=\int_a^b\left[\overline{\psi}(x)\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\varphi(s)\left(\int_a^b K(x,s)\overline{\psi}(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\\&=\int_a^b\varphi(s)\left(\overline{\int_a^b \overline{K(x,s)}\psi(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}s\\&=\int_a^b\varphi(x)\left(\overline{\int_a^b \overline{K(s,x)}\psi(s)\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}x\\&=(\varphi,K^*\psi).\end{aligned}$$

因此,由 Riesz-Schauder 定理可得 Fredholm 的另两条定理.

定理3.3 若 λ_0 是核算子 K 的特征值,则 $\overline{\lambda_0}$ 是它的共轭算子 K^* 的特征值,且方程

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s=0 \tag{5.32}$$

的线性无关的特征函数的个数与它的共轭方程

$$\psi(x)-\overline{\lambda_0}\int_a^b \overline{K(s,x)}\psi(s)\mathrm{d}s=0 \tag{5.33}$$

的特征函数的个数是相同的.

定理3.4 设 λ_0 是核算子 K 的一个特征值,则非齐次方程(5.13) 有解的充分必要条件为:方程的自由项 f 与共轭齐次方程(5.33) 的一切特征函数正交.

例 3.2 求积分方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 (x+s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

的特征值与特征函数.并进而求得当 λ 不取特征值时非齐次积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 (x+s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

的解,其中 $f \in L^2[0,1]$.

解 由于 $\varphi(x) = \lambda\int_0^1 (x+s)\varphi(s)\mathrm{d}s$

$$= \lambda\int_0^1 s\varphi(s)\mathrm{d}s + \left(\lambda\int_0^1 \varphi(s)\mathrm{d}s\right)x,$$

所以 $\varphi(x)$ 可由 1 与 x 线性表示,故可设 $\varphi(x) = c_1 + c_2 x$,将之代入原方程,可得

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 x &= \lambda\int_0^1 s(c_1 + c_2 s)\mathrm{d}s + \left(\lambda\int_0^1 (c_1 + c_2 s)\mathrm{d}s\right)x \\ &= \frac{\lambda}{2}c_1 + \frac{\lambda}{3}c_2 + \left(\lambda c_1 + \frac{\lambda}{2}c_2\right)x, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\lambda}{2}c_1 + \dfrac{\lambda}{3}c_2; \\ c_2 = \lambda c_1 + \dfrac{\lambda}{2}c_2. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{\lambda}{2}\right)c_1 - \dfrac{\lambda}{3}c_2 = 0; \\ -\lambda c_1 + \left(1 - \dfrac{\lambda}{2}\right)c_2 = 0. \end{cases} \tag{5.34}$$

它有非零解 c_1, c_2 的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\lambda}{2} & -\dfrac{\lambda}{3} \\ -\lambda & 1 - \dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = -\frac{\lambda^2}{12} - \lambda + 1 = 0,$$

由此得$\lambda_1=-6+4\sqrt{3}$，$\lambda_2=-6-4\sqrt{3}$，此即所给积分方程的特征值.为求相应的特征函数，先将λ_1代入(5.34)求出(5.34)的一个基础解系$c_1=\dfrac{\frac{\lambda_1}{3}}{1-\frac{\lambda_1}{2}}=\dfrac{2\lambda_1}{6-3\lambda_1}$，$c_2=1$，由此得与$\lambda_1$相应的特征函数$\varphi_1(x)=\dfrac{2\lambda_1}{6-3\lambda_1}+x$；同理可求得与$\lambda_2$相应的特征函数$\varphi_2(x)=\dfrac{2\lambda_2}{6-3\lambda_2}+x$.

对非齐次积分方程，可设其解

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda(c_1+c_2x).$$

将之代入原非齐次积分方程，同理可得关于c_1和c_2的代数方程组

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)c_1-\dfrac{\lambda}{3}c_2=\displaystyle\int_0^1 sf(s)\mathrm{d}s;\\ -\lambda c_1+\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)c_2=\displaystyle\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s.\end{cases}$$

当λ不取特征值时，可求得

$$c_1=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\int_0^1 sf(s)\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{3}\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s}{-\frac{\lambda^2}{12}-\lambda+1},$$

$$c_2=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1 sf(s)\mathrm{d}s}{-\frac{\lambda^2}{12}-\lambda+1}.$$

所以，当λ不取特征值时，所给非齐次积分方程有惟一解

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x)+\lambda(c_1+c_2x)\\&=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{6(\lambda-2)(x+s)-12\lambda xs-4\lambda}{\lambda^2+12\lambda-12}f(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

注:例 3.2 的共轭方程为

$$\psi(x) = \overline{\lambda}\int_0^1 (x+s)\psi(s)\mathrm{d}s,$$

其特征函数与例 3.2 的特征函数相同,即 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$. 因此,由定理 3.4,当 λ 取特征值时,例 3.2 的非齐次方程有解的充要条件是自由项 f 与特征函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 均正交,即

$$(f,\varphi_1) = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x = 0;$$

$$(f,\varphi_2) = \int_0^1 f(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x = 0.$$

§3.3 Hilbert-Schmidt 定理

定义 3.3 如果积分核 $K(x,s)$ 与它的共轭核 $\overline{K(s,x)}$ 相同,即 $K(x,s) = \overline{K(s,x)}$. 则称这样的核为**对称核**,相应的积分方程称为**对称方程**.

定理 3.5 由对称核产生的算子一定是自伴算子. 反之,当核 $K(x,s)$ 产生的算子是自伴算子时,一定有 $K(x,s) = \overline{K(s,x)}$.

证 前一结论是显然的. 现证后一结论. 由于 K 是自伴算子,故有

$$(K\varphi,\psi) = (\varphi,K^*\psi)$$

及 $$(K\varphi,\psi) = (\varphi,K\psi) \quad (\forall\, \varphi,\psi \in L^2[a,b]).$$

由此得到 $$(\varphi,K\psi - K^*\psi) = 0 \quad (\forall\, \varphi,\psi \in L^2[a,b]).$$

将之展开得

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x\,\overline{\int_a^b (K(x,s) - \overline{K(s,x)})\psi(s)\mathrm{d}s} = 0,$$

特别,当 $\varphi(x)$ 取为

$$\varphi(x) = \int_a^b (K(x,s) - \overline{K(s,x)})\psi(s)\mathrm{d}s$$

时,就有

$$\int_a^b (K(x,s) - \overline{K(s,x)})\psi(s)\mathrm{d}s = 0.$$

取 $\psi(s) = \overline{K(x,s) - \overline{K(s,x)}}$ （任意固定 $x \in [a,b]$），

就可推出 $$K(x,s) = \overline{K(s,x)}.$$

因此，对称核产生的算子既是紧算子又是自伴算子，由紧自伴算子的 Hilbert-Schmidt 定理（参见书目[4]或[13]）可直接得到如下关于对称积分方程的定理.

定理 3.6 对称核的特征值至多有可数个，且只能是趋向于无穷大的实数列 $\{\lambda_i\}$. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 是对称核 $K(x,s)$ 的一切特征值，且 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$ 是与之对应的标准化的特征函数. 设 $h(x) \in L^2[a,b]$，则函数

$$f(x) = Kh = \int_a^b K(x,s)h(s)\mathrm{d}s$$

可展开为关于标准正交系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的绝对收敛且一致收敛的 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x),\ f_n = (f, \varphi_n);$$

或 $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(x),\ f_n = \frac{h_n}{\lambda_n},\ h_n = (h, \varphi_n).$$

由此定理可以给出具有对称核的积分方程(5.13)的解. 设

$$a_n = (\varphi, \varphi_n) = \int_a^b \varphi(x)\overline{\varphi}_n(x)\mathrm{d}x,$$

由定理 3.6 有

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n}\varphi_n(x),$$

代入(5.13)得

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n}\varphi_n(x). \tag{5.35}$$

为确定 a_n，将上式两边乘以 $\overline{\varphi_i}(x)$，且关于 x 从 a 到 b 积分. 注意到

$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$ 是标准正交系，得到

$$a_i = f_i + \frac{\lambda}{\lambda_i}a_i,\ f_i = (f,\varphi_i)\ (i = 1,2,\cdots).$$

如果 λ 不是方程(5.13)的特征值，即 $\lambda \neq \lambda_i\,(i = 1,2,\cdots)$，由此解出

$$a_i = \frac{\lambda_i f_i}{\lambda_i - \lambda},$$

代入(5.35)得到积分方程(5.13)的解

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(x).$$

例3.3 求积分方程 $\varphi(x) - \lambda\int_0^l K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s = 0$ 的特征值与特征函数，并进而求解非齐次积分方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^l K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s = \cos\frac{\pi}{l}x,$$

其中 $K(x,s) = \begin{cases}\dfrac{x}{l}(l - s),\ x \leqslant s,\\[2mm] \dfrac{s}{l}(l - x),\ x \geqslant s.\end{cases}$

解 由于 $K(x,s) = K(s,x)$，所以所给积分方程为对称方程. 将齐次方程改写为

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda\int_0^x \frac{s}{l}(l - x)\varphi(s)\mathrm{d}s + \lambda\int_x^l \frac{x}{l}(l - s)\varphi(s)\mathrm{d}s\\ &= \frac{\lambda(l - x)}{l}\int_0^x s\varphi(s)\mathrm{d}s + \frac{\lambda x}{l}\int_x^l (l - s)\varphi(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

方程两边对 x 求导两次得 $\varphi(x)$ 所满足的微分方程

$$\varphi''(x) = -\lambda\varphi(x)$$

及边界条件 $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

$$\begin{cases}\varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0,\\ \varphi(0)=\varphi(l)=0\end{cases}$$

仅当 $\lambda>0$ 时有非零解. 当 $\lambda>0$ 时方程的通解为

$$\varphi(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由 $\varphi(0)=0$ 得 $c_1=0$, 由 $\varphi(l)=0$ 得 $\sqrt{\lambda}l=k\pi$. 即

$$\lambda=\frac{k^2\pi^2}{l^2}\quad(k=1,2,\cdots)$$

时有非零解

$$\varphi(x)=c_2\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

由此得到原积分方程的所有特征值和所有标准正交的特征函数分别为

$$\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}\text{ 与 }\varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x\quad(k=1,2,\cdots).$$

为求非齐次方程的解, 计算

$$\begin{aligned}f_k&=(f,\varphi_k)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\cos\frac{\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\sqrt{\frac{1}{2l}}\left(\frac{l}{(k+1)\pi}(1-(-1)^{k+1})+\frac{l}{(k-1)\pi}(1-(-1)^{k-1})\right)\\&=\begin{cases}0\quad(k=2n+1),\\ \dfrac{\sqrt{2l}4n}{\pi(4n^2-1)}\quad(k=2n).\end{cases}\end{aligned}$$

所以当 $\lambda\neq\lambda_k$ 时, 原非齐次方程的解为

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\cos\frac{\pi x}{l}+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2l}4n}{\pi(4n^2-1)}\\&\quad\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2n\pi}{l}x\cdot\left(\frac{4n^2\pi^2}{l^2}-\lambda\right)^{-1}\\&=\cos\frac{\pi x}{l}+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8nl^2}{\pi(4n^2-1)(4n^2\pi^2-\lambda l^2)}\sin\frac{2n\pi}{l}x.\end{aligned}$$

习　题　5.3

1. 用逆算子解下列各积分方程:

(1) $\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(s)\mathrm{d}s = e^x$;

(2) $\varphi(x) + \lambda\int_0^1 e^{x+s}\varphi(s)\mathrm{d}s = x$.

2. 证明 0 不是核算子 K 的特征值.

3. 求下列各积分方程的特征值及相应特征函数:

(1) $\varphi(x) = \lambda\int_0^{\pi} \sin x \sin s \varphi(s)\mathrm{d}s$;

(2) $\varphi(x) = \lambda\int_0^1 2e^{x+s}\varphi(s)\mathrm{d}s$.

4. 求积分方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

的所有特征值和特征函数,并由此求解非齐次积分方程(λ 不取特征值时)

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s = \cos\frac{\pi}{2}x,$$

其中 $K(x,s) = \begin{cases} x, x \leqslant s, \\ s, x \geqslant s. \end{cases}$

§4　最佳逼近与投影定理的应用

§4.1　最佳逼近的存在性与惟一性

定义 4.1　设 X 是赋范空间, F 是 X 的子空间, $f \in X$. 如果存在 $f_0 \in F$ 使

$$\| f - f_0 \| = \inf_{g \in F} \| f - g \|,$$

则称 f_0 是 f 在 F 中的**最佳逼近**.

例 4.1　设 $X = C[a,b]$, $F = F_n = \mathrm{span}\{1, x, \cdots, x^n\}$, $f \in$

$C[a,b]$. 求 f 在 F_n 中的最佳逼近, 即是确定系数 $a_0^*, a_1^*, \cdots, a_n^*$ 使

$$\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-(a_0^*+a_1^*x+\cdots+a_n^*x^n)\right|$$

$$=\inf_{a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R}}\left\{\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\right|\right\}.$$

如此确定的多项式 $a_0^*+a_1^*x+\cdots+a_n^*x^n$ 称为 $f(x)$ 的最佳一致逼近多项式. 当我们希望用多项式来近似计算 $f(x)$ 的函数值时, 常采用最佳一致逼近多项式.

例 4.2 设 $X=L^2[0,2\pi]$, $F=\mathrm{span}\left\{\frac{1}{2},\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx\right\}$, $f\in L^2[0,2\pi]$. 求 f 在 F 中的最佳逼近, 即是确定 $a_0^*, a_1^*, b_1^*, \cdots, a_n^*, b_n^*$ 使

$$\int_a^b\left[f(x)-\left(\frac{a_0^*}{2}+a_1^*\cos x+b_1^*\sin x+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+a_n^*\cos nx+b_n^*\sin nx\right)\right]^2\mathrm{d}x$$

$$=\inf_{a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n\in\mathbf{R}}\int_a^b\left[f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right]^2\mathrm{d}x.$$

如此确定的三角多项式 $\frac{1}{2}a_0^*+a_1^*\cos x+b_1^*\sin x+\cdots+a_n^*\cos nx+b_n^*\sin nx$ 称为最佳平方逼近三角多项式. 当我们希望用三角多项式来近似计算函数 $f(x)$ 的积分值时, 常采用最佳平方逼近三角多项式.

从以上两例可以看出, 最佳逼近问题具有理论与应用的价值. 关于最佳逼近的存在性, 有如下定理.

定理 4.1 设 X 是赋范空间, F 是 X 的有限维子空间, 则对任

意 $f \in X$，总有 $f_0 \in F$ 使

$$\| f - f_0 \| = \inf_{g \in F} \| f - g \| = d(f,F). \tag{5.36}$$

证　由下确界的定义，对任意 $n \in \mathbf{N}$，有 $f_n \in F$ 使

$$\| f - f_n \| \leqslant d(f,F) + \frac{1}{n},$$

从而

$$\begin{aligned} \| f_n \| &\leqslant \| f - f_n \| + \| f \| \\ &\leqslant d(f,F) + \frac{1}{n} + \| f \| \\ &\leqslant d(f,F) + \| f \| + 1, \end{aligned}$$

故序列 $\{f_n\}$ 是有界的.

因有限维空间中的任何有界集都是列紧的，所以存在子序列 $\{f_{n_k}\}$，使

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k} = f_0.$$

由于 F 是闭集，所以 $f_0 \in F$.

在 $\| f - f_{n_k} \| \leqslant d(f,F) + \dfrac{1}{n_k}$ 中，令 $k \to \infty$ 得到

$$\| f - f_0 \| \leqslant d(f,F).$$

又显然有

$$\| f - f_0 \| \geqslant d(f,F),$$

从而有

$$\| f - f_0 \| = d(f,F).$$

为讨论最佳逼近的惟一性，我们引入如下定义.

定义 4.2　设 X 为赋范空间，若对任意 $x, y \in X, x \neq y$，$\| x \| = \| y \| = 1$ 及任意 $\alpha \in (0,1)$，均有 $\| \alpha x + (1 - \alpha) y \| < 1$，则称 X 为**严格凸空间**.

严格凸空间意味着单位球面 $S(0,1)$ 上任意两点的连线一定位于单位球 $B(0,1)$ 内. 对严格凸空间有如下等价命题.

定理 4.2　赋范空间 X 是严格凸的充要条件是对任意 $f, g \in X, f, g \neq \theta$，如果 $\| f + g \| = \| f \| + \| g \|$，则一定存在常数 $c > 0$ 使 $f = cg$.

证 必要性 用反证法.设$f,g\neq\theta$且$\|f+g\|=\|f\|+\|g\|$.假设对任意$c>0$均有$f\neq cg$,令$\tilde{f}=\dfrac{f}{\|f\|}$,$\tilde{g}=\dfrac{g}{\|g\|}$,则$\tilde{f}\neq\tilde{g}$,且$\|\tilde{f}\|=\|\tilde{g}\|=1$.取$\alpha=\dfrac{\|f\|}{\|f\|+\|g\|}$,则$0<\alpha<1$且$1-\alpha=\dfrac{\|g\|}{\|f\|+\|g\|}$.因而,由$X$的严格凸性

$$
\begin{aligned}
1 &> \|\alpha\tilde{f}+(1-\alpha)\tilde{g}\| \\
&= \left\|\frac{\|f\|\tilde{f}}{\|f\|+\|g\|}+\frac{\|g\|\tilde{g}}{\|f\|+\|g\|}\right\| \\
&= \left\|\frac{f+g}{\|f\|+\|g\|}\right\| = \frac{\|f+g\|}{\|f\|+\|g\|},
\end{aligned}
$$

从而有
$$\|f+g\|<\|f\|+\|g\|,$$
导出矛盾.

充分性 对任意$f,g\in X$,$\|f\|=\|g\|=1$且$f\neq g$时,则对任意$\alpha\in(0,1)$均有$f\neq\dfrac{1-\alpha}{\alpha}g$,即$\alpha f\neq(1-\alpha)g$,因而

$$
\begin{aligned}
\|\alpha f+(1-\alpha)g\| &< \|\alpha f\|+\|(1-\alpha)g\| \\
&= \alpha+(1-\alpha)=1.
\end{aligned}
$$

由此定理不难得出

例 4.3 空间$L^p[a,b](1<p<+\infty)$和内积空间都是严格凸的.

此结果可由 Minkowski 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式等号成立时的充要条件及定理 4.2 推出.

例 4.4 $C[a,b]$及$L^1[a,b]$都不是严格凸的.

以$C[0,1]$为例,取$f(x)=1,g(x)=x$,都满足$\|f\|=\|g\|=1$,但$\left\|\dfrac{1}{2}(f+g)\right\|=1$.由定义 4.2,$C[0,1]$不是严格凸的.

以$L^1[0,1]$为例,只要$f(x)$与$g(x)$都是非负的,就有等式

$\| f+g \| = \| f \| + \| g \|$. 由定理 4.2,$L^1[a,b]$ 不是严格凸的.

对严格凸空间有如下定理.

定理4.3 设 X 是严格凸空间,F 是 X 的有限维子空间,则对任意 $f \in X$,必有惟一的 $f_0 \in F$ 使

$$\| f - f_0 \| = d(f,F).$$

证 f_0 的存在性已由定理 4.1 证明,今证明其惟一性. 若 $d(f,F) = d > 0$,设 $f_0 \neq \tilde{f}$ 都是 f 在 F 中的最佳逼近,就有 $\| f - f_0 \| = \| f - \tilde{f} \| = d$. 从而,对任意 $\alpha \in (0,1)$,由严格凸性

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{d} \| f - (\alpha f_0 + (1-\alpha)\tilde{f}) \| \\
&= \frac{1}{d} \| \alpha(f - f_0) + (1-\alpha)(f - \tilde{f}) \| \\
&= \left\| \alpha \frac{f - f_0}{d} + (1-\alpha) \frac{f - \tilde{f}}{d} \right\| < 1.
\end{aligned}$$

又因 $\alpha f_0 + (1-\alpha)\tilde{f} \in F$,此与 d 的定义矛盾,故必有 $f_0 = \tilde{f}$;当 $d(f,F) = 0$,由 F 的闭性 $f \in F$. 若 f_0 是 f 在 F 中的最佳逼近,则有 $\| f - f_0 \| = 0$,再由范数定义,当 $\| f - f_0 \| = 0$ 时必有 $f = f_0$.

惟一性得证.

§4.2 $C[a,b]$ 中最佳逼近的惟一性与 Chebyshev 多项式

由例 4.1,为了计算 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的近似值,常采用 $f(x)$ 的最佳一致逼近多项式. 但由例 4.4,$C[a,b]$ 不是严格凸的,因此不满足惟一性定理 4.3 的条件. 对 $C[a,b]$,我们不加证明地给出如下惟一性定理.

定理4.4 **(Harr 惟一性定理)** 若 F 是 $C[a,b]$ 中的有限维子空间,则对每一个 $f(x) \in C[a,b]$,它在 F 中存在惟一最佳逼近

的充要条件是:F 中每一个非零函数在$[a,b]$中的零点个数都少于 F 的维数(简称作子空间 F 满足 Harr 条件).

例 4.5 设 $F=F_n=\mathrm{span}\{1,x,\cdots,x^n\}\subset C[a,b]$,则 F_n 的维数是 $n+1$,任一个 $g(x)\in F_n$(即 $g(x)$ 至多是 n 次多项式)的零点个数最多是 n,小于 $n+1$.所以 F_n 满足 Harr 条件.再由定理 4.1,例 4.1 中的最佳一致逼近多项式是惟一存在的.

为了给出最佳一致逼近多项式的特征,我们给出如下定义:

定义 4.3 设 $f(x)\in C[a,b]$,$a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$.若 $f(x)$ 在 $x_i(i=0,1,2\cdots,n)$ 相间地取 $\|f\|$ 及 $-\|f\|$,则称 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为函数 $f(x)$ 的**交错集**.定义中的第一个点 x_0 可取 $\|f\|$ 或 $-\|f\|$,故有 $f(x_i)=(-1)^i\|f\|(i=0,1,\cdots,n)$ 或 $f(x_i)=-(-1)^i\|f\|(i=0,1,\cdots,n)$.

例 4.6 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 在$[-1,1]$上的交错集为 $x_i=\cos\dfrac{i}{n}\pi(i=0,1,\cdots,n)$,它们相间取到 $\|T_n\|=1$ 和 $-\|T_n\|=-1$.

下面定理给出了最佳一致逼近多项式的特征.

定理 4.5 设 $F_n=\mathrm{span}\{1,x,\cdots,x^n\}$,$f(x)\in C[a,b]$,若 $f_0(x)\in F_n$ 使 $f-f_0$ 在$[a,b]$中有 $n+2$ 个点组成的交错集(设为 $x_0,x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}$),则 f_0 是 f 在 F_n 中的最佳逼近.

证 按例 4.5,f 在 F_n 中的最佳逼近是惟一存在的.假设 f_0 不是 f 在 F_n 中的最佳逼近,即存在 $\tilde{f}\in F_n$ 满足 $|f(x_i)-\tilde{f}(x_i)|\leqslant\|f-\tilde{f}\|(i=0,1,\cdots,n,n+1)$ 且有

$$\|f-\tilde{f}\|<\|f-f_0\|. \tag{5.37}$$

考虑次数不超过 n 的多项式 $\tilde{f}(x)-f_0(x)$.因为

$$\tilde{f}(x)-f_0(x)=(\tilde{f}(x)-f(x))+(f(x)-f_0(x)), \tag{5.38}$$

若 $f(x_i)-f_0(x_i)=\|f-f_0\|$，则由(5.37)、(5.38)得

$$\tilde{f}(x_i)-f_0(x_i)=(\tilde{f}(x_i)-f(x_i))+(f(x_i)-f_0(x_i))$$
$$\geqslant \|f-f_0\|-\|f-\tilde{f}\|>0; \quad (5.39)$$

若 $f(x_i)-f_0(x_i)=-\|f-f_0\|$，则由(5.37)、(5.38)得

$$\tilde{f}(x_i)-f_0(x_i)\leqslant \|f-\tilde{f}\|-\|f-f_0\|<0. \quad (5.40)$$

由于 $x_i(i=0,1,\cdots,n,n+1)$ 为交错集，故不等式(5.39)、(5.40)应交替出现. 即多项式 $\tilde{f}(x)-f_0(x)$ 至少变号 $n+1$ 次. 而由连续函数介值定理，$\tilde{f}(x)-f_0(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个零点. 这与 $\tilde{f}(x)-f_0(x)$ 至多是 n 次多项式矛盾. 所以，$f_0(x)$ 是 $f(x)$ 在 F_n 中的最佳一致逼近多项式.

定义 4.4 定义在区间 $[-1,1]$ 中的用复合形式

$$T_n(x)=\cos nt,\ t=\arccos x\ (x\in[-1,1]) \quad (5.41)$$

给出的函数 $T_n(x)$，称为 n 次 **Chebyshev 多项式**.

由例 4.6，Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 有 $n+1$ 个点组成的交错集. 下面的递推公式表明 $T_n(x)$ 是 n 次多项式. 由三角关系式

$$\cos(n+1)t=2\cos t\cos nt-\cos(n-1)t\quad(n\geqslant 1)$$

令 $t=\arccos x$ 得三项递推公式

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x). \quad (5.42)$$

再由 $T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$ 得出 Chebyshev 多项式的前几个

$$T_2(x)=2x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x,$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,\ T_5(x)=16x^5-20x^3+5x.$$

由(5.42)可以推出 $T_n(x)$ 的首次系数为 $\frac{1}{2^{n-1}}$，所以

$$\widetilde{T_n}(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

是首项系数为 1 的 n 次多项式，且在 $x_i=\cos i\frac{\pi}{n}(i=0,1,\cdots,n)$

处轮流取得最大值$\frac{1}{2^{n-1}} = \| \widetilde{T}_n \|$ 和最小值 $-\frac{1}{2^{n-1}} = -\| \widetilde{T}_n \|$.

定理 4.6 在区间$[-1,1]$上所有最高项系数为 1 的一切 n 次多项式中，$\widetilde{T}_n(x)$ 与 0 有最小距离$\frac{1}{2^{n-1}}$.

证 由于$\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n - f_0(x)$ 且

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \| \widetilde{T}_n \| = \| x^n - f_0(x) \|,$$

其中 $f_0(x) \in F_{n-1}$. 由于 $x_i = \cos i \frac{\pi}{n} (i = 0,1,\cdots,n)$ 组成$\widetilde{T}_n(x)$ 的交错集，由定理 4.5，$f_0(x)$ 是 x^n 在 F_{n-1} 中的最佳逼近，即 $\| x^n - f_0 \| = \| \widetilde{T}_n \|$ 最小，证毕.

例 4.7 求 $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2x - 1$ 在$[-1,1]$上的最佳二次一致逼近多项式.

解 $f(x)$ 的最佳二次一致逼近多项式 $f_0(x)$ 应使 $f(x) - f_0(x)$ 与 0 具有最小距离. 由定理 4.6，$f_0(x)$ 满足

$$f(x) - f_0(x) = \frac{3}{4} T_3(x) = 3x^3 - \frac{9}{4} x,$$

所以 $$f_0(x) = f(x) - (3x^3 - \frac{9}{4}x) = x^2 + \frac{17}{4}x - 1$$

为所求的最佳二次一致逼近多项式.

§4.3 投影定理的应用举例

定义 4.5 设 $f \in L^2[a,b]$，F 是$L^2[a,b]$的有限维子空间. 如果 $\tilde{f} \in F$ 是 f 在 F 中的最佳逼近，则称 $\tilde{f}$ 是 f 的**最佳平方逼近**.

由投影定理，求 f 在F 中的最佳平方逼近归结为求f 在F 上的投影.

设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是F 的标准正交基底，则由投影定理，$f(x)$

在这组基上的投影系数为

$$a_1^* = (f, u_1),\ a_2^* = (f, u_2), \cdots, a_n^* = (f, u_n), \tag{5.43}$$

所以 f 在 F 中的最佳平方逼近为

$$\tilde{f}(x) = a_1^* u_1(x) + a_2^* u_2(x) + \cdots + a_n^* u_n(x). \tag{5.44}$$

例 4.8 续例 4.2,将 F 的基底标准化得标准正交基底$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$,于是由(5.43)得 $f(x)$ 在 F 的这组基上的投影系数分别为

$$\tilde{a}_0 = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\tilde{a}_1 = \left(f, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x,$$

$$\tilde{b}_1 = \left(f, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x,$$

$$\cdots$$

$$\tilde{a}_n = \left(f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_0^{2\pi} f(x)\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,$$

$$\tilde{b}_n = \left(f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_0^{2\pi} f(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

所以由(5.44),$f(x)$ 在 F 中的最佳平方逼近

$$\tilde{f}(x) = \tilde{a}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \tilde{a}_1\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + \tilde{b}_1\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + \cdots + \tilde{a}_n\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \tilde{b}_n\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{a_0^*}{2} + a_1^*\cos x + b_1^*\sin x + \cdots + a_n^*\cos nx + b_n^*\sin nx.$$

其中 $a_i^*\ (i = 0,1,\cdots,n), b_i^*\ (i = 1,\cdots,n)$ 正是函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

定理 4.7 Legendre 多项式 $p_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n(n=0,1,2,\cdots)$ 是 $L^2[-1,1]$ 中的正交多项式族.

证 易知 $p_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式. 下证正交性. 由分部积分法,得

$$\int_{-1}^{1}u^{(n)}v\mathrm{d}x=\left(u^{(n-1)}v-u^{(n-2)}v'+\cdots+(-1)^{n-1}uv^{(n-1)}\right)\Big|_{-1}^{1}+(-1)^n\int_{-1}^{1}uv^{(n)}\mathrm{d}x.$$

令 $u=(x^2-1)^n, v=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m, m\leqslant n$,并且注意到

$$u^{(k)}(\pm 1)=0\ (k=n-1,n-2,\cdots,1,0),$$

可得

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\mathrm{d}x=\begin{cases}0,\ m<n;\\(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x, m=n.\end{cases}$$

由于
$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x$$
$$=2(-1)^n\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x=2(-1)^n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2\cdot(2n)!!}{(2n+1)!!}(-1)^n,$$

从而

$$\int_{-1}^{1}p_n(x)p_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m<n;\\ \frac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}\qquad(5.45)$$

例 4.9 求 $f(x)=e^x$ 在$L^2[-1,1]$中的最佳平方逼近三次多项式.

解　由定理 4.7, $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ 构成子空间 $F = \text{span}\{1, x, x^2, x^3\}$ 的正交基底，由(5.45) 将之标准化，再由(5.43),(5.44) 得 $f(x) = e^x$ 在 $L^2[-1,1]$ 中的最佳平方逼近三次多项式为

$$
\begin{aligned}
\tilde{f} &= \sum_{i=0}^{3} \frac{(f, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i \\
&\approx 1.1752 p_0(x) + 1.1036 p_1(x) \\
&\quad + 0.3578 p_2(x) + 0.07046 p_3(x) \\
&= 0.9963 + 0.099796x + 0.53672x^2 + 0.17614x^3.
\end{aligned}
$$

§4.4　最小二乘法

在许多实际问题中，经常要求利用观测数据拟合系统的真实模型．例如：在考察某化学反应时，发现反应的速度主要取决于所用催化剂的用量 x 及所加的温度 T，当 x 和 T 改变时反应速度也跟着改变．我们希望通过试验，在不同的 x, T 值的条件下，观察反应速度 y 的值，找出 $y = f(x, T)$ 的具体形式，从而通过控制 x 和 T 以达到控制反应速度．

为简单起见，我们假定所考虑的系统模型是线性模型．具体提法如下：已知量 y 与量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间呈线性关系

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n,$$

但事先这些线性系数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是不知道的．如果观测是绝对精确的话，确定 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 仅需测量 n 次，通过解线性方程组就可解出 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$．现假定由于某些原因，观测值不能被精确测量而是带有随机的测量误差．因此，我们可以多取几组观测值并利用最小二乘原理消去由于数据误差所造成的随机干扰．根据概率论的理论，观测数据越多，误差就越小．具体做法如下：设给出一组观测值：

$$
\begin{matrix}
y^{(1)}, & x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \cdots, & x_n^{(1)} \\
y^{(2)}, & x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \cdots, & x_n^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y^{(m)}, & x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & \cdots, & x_n^{(m)}
\end{matrix}
$$

令确定 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_n$ 满足下面的条件

$$
\sum_{i=1}^{m} \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} \hat{\beta}_j \right)^2 = \min_{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n} \sum_{i=1}^{m} \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} \beta_j \right)^2, \tag{5.46}
$$

如此确定出的系数 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_n$ 称为**最小二乘解**.

上述问题可以看作是在空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中,求由上组观测值中的后 n 列向量张成的子空间上的元素,对于给定的上组观测值中的第一列向量的最佳逼近.

引入向量 $Y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(m)})^T, X = (x_j^{(i)})_{m \times n}, \beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T$,(5.46) 改写成矩阵形式为

$$
\| Y - X\hat{\beta} \|^2 = \min_{\beta} \| Y - X\beta \|^2, \tag{5.47}
$$

其中 $\| \cdot \|$ 取的是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的 Euclid 范数.假定上组观测值中给定的后 n 列向量线性无关,则 $r(X) = n$.

下面利用微分法求(5.46) 式的解 $\hat{\beta}$,记

$$
f(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{m} \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} \beta_j \right)^2.
$$

令

$$
\frac{\partial f}{\partial \beta_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)
$$

得方程组

$$
\sum_{i=1}^{m} \left(y^{(i)} - \sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} \beta_j \right) x_k^{(i)} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n).
$$

即

$$
\sum_{i=1}^{m} y^{(i)} x_k^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} x_k^{(i)} \beta_j
$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} x_j^{(i)} x_k^{(i)}\Big)\beta_j \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

用矩阵、向量形式表示，上述方程组可写成

$$X^T Y = (X^T X)\beta.$$

由于 $r(X) = n$，所以 $X^T X$ 是正定阵，从而存在逆阵，由此得到 β 的最小二乘解为

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y. \tag{5.48}$$

习　题　5.4

1. 设 X 是数域 $\boldsymbol{K}$ 上的赋范线性空间，$f \in X, F_n = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in X$，且是线性无关的)．证明函数

$$F(c) = \Big\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \Big\| \quad (c = (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \boldsymbol{K}^n)$$

是 $\boldsymbol{K}^n$ 上的连续函数，且 $p(c) \triangleq \Big\| \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \Big\|$ 也是 $\boldsymbol{K}^n$ 上的一个范数．

2. 设 X 是赋范线性空间，函数 $\varphi: X \to \boldsymbol{R}$ 称为凸的，如果不等式

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \ (\forall 0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

成立．求证凸函数的局部极小值必然是全空间最小值．

3. 继续第 1 题，证明以下断言：

(1) F 是一个凸函数；

(2) 若 $F(c)$ 的最小值点是 $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$，则 $f_0 \triangleq \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$ 是 f 在 F_n 中的最佳逼近．

4. 求函数 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 1$ 在$[-1,1]$上的最佳三次逼近多项式．

5. 用多元函数求极值法，求 a, b 使$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - (ax + b))^2 \mathrm{d}x$ 最小．

6. 观察物体的直线运动，得出如下数据：

时间 t/s	0.0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 s/m	0	10	30	50	80	110

求运动方程 $s = at + b$．

答案与提示

习题 1.1 1. 提示:证等式两边的集合互相包含. 2. 提示:证等式两边的集合互相包含. 3. 分 $f^{-1}(B)=\varnothing$ 与 $f^{-1}(B)\neq\varnothing$ 讨论. 4. 使等号不成立的反例:$X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b\}$,定义映射 $f(1)=f(3)=a$, $f(2)=b$,取 $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{2,3\}$. 5. 提示:将 $[0,1]$ 中的有理数排成 $r_1=0, r_2=1, r_3, r_4, \cdots$,令 $f(r_i)=r_{i+2}\,(i=1,2,\cdots)$,当 x 是 $[0,1]$ 中无理数时,令 $f(x)=x$. 6. 令 $A_n=\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_n \mid a_i\in \boldsymbol{Z}, a_0\neq 0, i=0,1,\cdots,n\}$,$A_n$ 与 $\boldsymbol{Z}^n\times\{\boldsymbol{Z}-\{0\}\}$ 对等,设 B 是整系数多项式全体,则 $B=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n$. 7. 提示:利用本节第 6 题结论.

习题 1.2 1. 由上确界性质,对 $\frac{1}{n}$,$\exists x_n\in A$,使 $a-\frac{1}{n}<x_n\leqslant a$,令 $n\to\infty$ 即可. 2. 提示:证 $\sup(A+B)\leqslant\sup A+\sup B$. 再证对 $\forall\varepsilon>0$, $\sup(A+B)>\sup A+\sup B-\varepsilon$. 类似证第二个等式. 3. 使等号不成立的例子:$x_n=(-1)^{n+1}$, $y_n=(-1)^n$. 4. 提示:将 $[a,b]$ 等分成两个小区间,取其中一个小区间 $[a_1,b_1]$,使 $f(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 的两个端点反号. 对 $[a_1,b_1]$ 重复上面过程,可得一区间套. 5. 提示:证 $\{x\mid f(x)>\alpha\}$ 的每一个点都是内点;证 $\{x\mid f(x)\geqslant\alpha\}$ 的余集是开集. 6. 由 $\mathring{G}$ 的定义证明. 7. 提示:先证 $\mathring{E}$ 是开集,即 $\forall x_0\in\mathring{E}$,$x_0$ 是 $\mathring{E}$ 的内点. 再设 G 是任一含于 E 中的开集,证明 $G\subset\mathring{E}$;证 $(\bar{E})^c$ 是开集。 8. 证 $(E')^c$ 是开集,即证:$\forall x\in(E')^c$,$\exists\delta>0$,使 $(x-\delta,x+\delta)$ 内不含 E 的聚点. 9. f 在 E 上一致连续,$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=2\varepsilon$ 即符合定义要求. 10. 设 $|f'(x)|\leqslant M\quad(x\in\boldsymbol{R})$,对 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ 即可. 11. 提示:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(x)\mathrm{d}x=\int_a^x g(x)\mathrm{d}x\quad(x\in[a.b])$,得

$\lim\limits_{n\to\infty}[f_n(x)-f_n(a)]=\int_a^x g(x)\mathrm{d}x$ 或 $f(x)=\int_a^x g(x)\mathrm{d}x+f(a)$. **12.** 提示：必要性由 $|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant|f_m(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|$ 即得. 充分性：$\forall\varepsilon>0$，由条件，$\exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，当 $n,m>N(\varepsilon)$ 时，$\forall x\in E$，有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$，令 $m\to\infty$ 即可. **13.** 提示：由于 $|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+k}(x)|\leqslant c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+k}=|c_{n+1}+\cdots+c_{n+k}|$，由数项级数收敛的 Cauchy 准则及本章第 12 题的结论可得结果. **14.** 提示：令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$，$S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，故 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **15.** 提示：$\forall x\in[a,b]$，由本节第 14 题结论：$\int_a^x\sigma(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(a)]$，有 $S(x)=\int_a^x\sigma(x)\mathrm{d}x+S(a)$.

习题 1.3 **1.** 提示：$\forall\varepsilon>0$，证明 $m^*(A\cup B)\leqslant m^*B+\varepsilon$，由 ε 的任意性，得 $m^*(A\cup B)\leqslant m^*B$；另一方面，$B\subset A\cup B$，证明 $m^*B\leqslant m^*(A\cup B)$. **2.** 由 $mE_1=m^*E_1$，$mE_2=m^*E_2$ 及 $m^*E_1\leqslant m^*E_2$ 即得结论. **3.** 提示：利用本节第 2 题的结论及测度的半可加性. **4.** 先设 $mE_1<+\infty$，$mE_2<+\infty$，由 $E_1\cup E_2=[E_1\setminus(E_1\cap E_2)]\cup[E_2\setminus(E_1\cap E_2)]\cup(E_1\cap E_2)$ 及测度的性质可得结论；再考虑 E_1,E_2 测度为无限的情况，设 $G_n=(-n,n)$，则 $G_n\cap(E_1\cup E_2)=\{(G_n\cap E_1)\setminus[G_n\cap(E_1\cap E_2)]\}\cup\{(G_n\cap E_2)\setminus[G_n\cap(E_1\cap E_2)]\}\cup[G_n\cap(E_1\cap E_2)]$，可得 $m(G_n\cap E_1)+m(G_n\cap E_2)=m[G_n\cap(E_1\cap E_2)]+m[G_n\cap(E_1\cup E_2)]$. 令 $n\to+\infty$ 即可. **5.** 提示：$E_1(f\geqslant a)=E_2(f\geqslant a)\cap E_1$. **6.** 提示：证明 $E(f\leqslant a)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k(f\leqslant a)$. **7.** 提示：设有理数全体为 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$，证明 $E(f>g)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[E(f>r_n)\cap E(g<r_n)]$. **8.** 提示：不妨 $f(x)$ 在区间 $E=(a,b)$ 上单调增加，对 $\forall\alpha$，令 $A=\{x\mid x\in(a,b),f(x)\leqslant\alpha\}$，当 $A\neq\varnothing$ 时，记 $\mu=\sup A$，则 $E(f\leqslant\alpha)=\begin{cases}\varnothing, & A=\varnothing,\\ (a,\mu)\text{ 或 }(a,\mu], & A\neq\varnothing.\end{cases}$

9. 提示:利用黎斯定理.

习题1.4 1. $f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上L可积,$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}m = 1$.提示:$f(x) = \cos x$(a.e.). 2. 先设$f$在$E_2$上有界,$\int_{E_2} f\mathrm{d}m = \int_{E_1\cup(E_2\setminus E_1)} f\mathrm{d}m = \int_{E_1} f\mathrm{d}m + \int_{E_2\setminus E_1} f\mathrm{d}m \geqslant \int_{E_1}\mathrm{d}m$;再讨论$f$在$E_2$上无界的情况. 3. 提示:由$|g|\leqslant f$可得$g^+\leqslant f, g^-\leqslant f$.令$\triangle n = [-n,n]$,有$\int_{\triangle n\cap E} g^+\mathrm{d}m \leqslant \int_{\triangle n\cap E} f\mathrm{d}m \leqslant \int_E f\mathrm{d}m$,由$\int_{\triangle n\cap E} g^+\mathrm{d}m$随$n$单增,且有界($\leqslant \int_E f\mathrm{d}m$)知$\int_E g^+\mathrm{d}m = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{\triangle n\cap E} g^+\mathrm{d}m$有限.同理可证$\int_E g^-\mathrm{d}m$有限. 4. 提示:$f$在$E$上$L$可积,可得$|f|$在$E$上可积,记$A = E(|f| = +\infty)$,在$A$上$[|f|]_n = n$,$\int_E [|f|]_n\mathrm{d}m \geqslant \int_A [|f|]_n\mathrm{d}m = \int_A n\mathrm{d}m = nm(A)$. 5. 提示:记$A = E(|f| = +\infty)$,令$\triangle_l = (-l,l)$,考虑$\int_E f\mathrm{d}m = \lim\limits_{l\to+\infty}\int_{\triangle_l\cap E}|f|\mathrm{d}m$,而$\int_{\triangle_l\cap E}|f|\mathrm{d}m = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\triangle_l\cap E}[|f|]_n\mathrm{d}m \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\triangle_l\cap A}[|f|]_n\mathrm{d}m = \lim\limits_{n\to+\infty} nm(\triangle_l\cap A)$.若$m(A)>0$,则$l$充分大时必有$m(\triangle_l\cap A)>0$.

6. 提示,令$f_n(t) = \dfrac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}(n = 1,2,\cdots)$.证明$n\geqslant 2$时,$f_n(t)\leqslant$
$F(t) = \begin{cases} t^{\frac{-1}{2}}, & 0<t\leqslant 1, \\ 4(t+2)^{-1}, & 1<t<+\infty. \end{cases}$ 再利用勒贝格控制收敛定理. 7. 提示:$\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$,由$L$逐项积分定理. 8. 提示:由$f_n(x)\to f(x)$(a.e.)可得$|f_n(x)|\to|f(x)|$ (a.e.)再由法都引理. 9. 提示:$\forall t\in[\alpha,\beta]$,并任取一列$h_n\to 0(h_n\neq 0)$,使$t+h_n\in[\alpha,\beta]$. $\forall x\in[a,b]$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n} = \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}$,于是对$\varepsilon = 1$,$\exists N\in\mathbf{N}$,当$n>N$

时. $\left|\dfrac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}\right| \leqslant \left|\dfrac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}-\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| + \left|\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| < 1+M$, 再用勒贝格有界收敛定理. **10.** 提示: $\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx} f(t)\,\mathrm{d}t$, 任取一列 $h_n \to 0(h_n \neq 0)$, 证明 $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{it(x+h_n)}-\mathrm{e}^{-itx}}{h_n} f(t)\right| \leqslant |tf(t)|$; 再用勒贝格控制收敛定理.

习题2.1 **1.** (1) 不构成距离函数. 取 $x=(0,1), y=(-2,0), z=(2,0)$, $d_1(y,z) > d_1(x,y)+d_1(x,z)$. (2) 构成距离函数. 提示: 证明三角形不等式时, 利用 $(a+b)^{\frac{1}{2}} \leqslant a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}(a,b \geqslant 0)$. **2.** 提示: 利用 $(a+b)^{\frac{1}{n}} \leqslant a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}(a,b \geqslant 0)$. **3.** 利用三角不等式. **4.** 提示: 考虑 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ $(t \in (0,+\infty))$, 易知 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

5. 提示: 见本节习题4的提示. **6.** 提示: $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(y,z)$, 令 $z=x$ 得 $d(x,y) \leqslant d(y,x)$. 同理可证 $d(y,x) \leqslant d(x,y)$.

习题2.2 **1.** 提示: 当 A 为开集时, $A=\bigcup\limits_{x \in A} B(x,\delta_x)$, 其中 $B(x,\delta_x) \subset A$. **2.** (1) 因 A、$B \subset A \cup B$, 故 $\bar{A}$、$\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, 得 $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. 反之, 证明若 $x \in (A \cup B)'$ 则 $x \in A'$ 或 $x \in B'$. (2) $A \cap B \subset A$、$B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \bar{A}$、$\bar{B} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. **3.** 提示: 类似于第一章习题1.2第7题. **4.** (1) 令 $G_n=\bigcup\limits_{x \in F} B\left(x,\dfrac{1}{n}\right)$, 则 G_n 是开集, F 为所给闭集, 证明 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. (2) 考虑 G^c (其中 G 是所给开集), 利用(1)的结论. **5.** (1) 验证距离的三条公理. (2) $d(x_n,1)=d(1,1)=0 \to 0(n \to \infty)$, $d(y_n,0)=\dfrac{1}{n} \to 0(n \to \infty)$. $\forall a \in \mathbf{R}$, $d(x_n+y_n,a)=\begin{cases}|a|, & |a| \geqslant 1,\\ 1-\dfrac{1}{n}, & |a|<1,\end{cases}$ n 充分大. $d(x_n+y_n,a) \nrightarrow 0$, 即 $x_n+y_n \nrightarrow a$, a 为任意实数. **6.** $d_p^p(x_{nk},0)=\int_0^1 |x_{nk}(t)-0|^p \mathrm{d}m = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 1^p \mathrm{d}m + \int_{[0,1] \setminus \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]} 0\,\mathrm{d}m = \dfrac{1}{n} \to 0(n \to \infty)$.

$\forall t_0 \in [0,1]$，当 $n > 3$ 时，若 $t_0 \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$，则 $x_{nk}(t_0) = 1$（当 $t_0 = \frac{k-1}{n}$ 时，还有 $x_{k-1}(t_0) = 1$；当 $t_0 = \frac{k}{n}$ 时，$x_{n,k+1}(t_0) = 1$），其余 $x_{n,j}(t_0) = 0$. 即在 t_0 处，$n > 3$ 时，$x_{n,1}(t), x_{n,2}(t), \cdots, x_{n,n}(t)$ 有的值为 1，有的值为零. 可见数列 $x_{11}(t_0), x_{2,1}(t_0), x_{22}(t_0), \cdots, x_{n,1}(t_0), x_{n,2}(t_0), \cdots, x_{n,n}(t_0), \cdots$ 含有子列 $0,0,\cdots,0,\cdots$ 及子列 $1,1,\cdots,1,\cdots$. **7.** 提示：$\forall j \in \mathbf{N}$，$|x_j^{(n)} - 0| = \sqrt{\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^j} < \sqrt{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$，但 $d(x_n, x_0) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - 0|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$，其中 $x_0 = \{0,0,\cdots,0,\cdots\}$.

习题 2.3 **1.** 设 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，则 $m,n > N$ 时 $d(x_m, x_n) < 1$，特别 $d(x_{N+1}, x_n) < 1(n = N+1, N+2, \cdots)$，令 $M = \max\{d(x_{N+1}, x_1), \cdots, d(x_{N+1}, x_N), 1\}$，有 $d(x_{N+1}, x_n) \leqslant M(n = 1,2,\cdots)$. **2.** 提示：由 $d_2(x_m, x_n) \leqslant c_2 d_1(x_m, x_n)$，可知 (X, d_1) 中基本列必是 (X, d_2) 中基本列，同样，由 $d_1(x_m, x_n) \leqslant \frac{1}{c_1} d_2(x_m, x_n)$ 可知 (X, d_2) 中基本列必是 (X, d_1) 中基本列. 对收敛点列的论证类似. **3.** 提示：证明 $(\mathbf{Z}^+, d)$ 中的任一基本列，从某一项以后恒为常数. 为此，取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，$\exists N \in \mathbf{N}$，当 $m,n > N$ 时，$d(m,n) = |m-n| < \frac{1}{2}$，$m,n$ 为正整数，故 $m = n$. **4.** 取 $x_n = n$，易证 $\{x_n\}$ 是 $(\mathbf{Z}^+, d)$ 中基本列，$\forall n_0 \in \mathbf{Z}^+$，$\lim\limits_{n\to\infty} d(n, n_0) = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}\right| = \frac{1}{n_0} \neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq n_0$，即 $\{x_n\}$ 不收敛. **5.** 提示：证明离散度量空间中任一基本列必从某一项开始都取同一个元. **6.** 提示：由于 l^∞ 完备，只需证明 c 是 l^∞ 的闭子空间. 为此，证明 c 中任一收敛点列的极限仍在 c 中. **7.** 提示：设 $x^{(n)} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_j^{(n)}, \cdots\}$ $(n = 1,2,\cdots)$ 是 s 中任一基本列，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}$，当 $m,n > N$ 时，$d(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|} < \varepsilon$. 对每个固定的 k，有 $\frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|} < \varepsilon$. 得数列 $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots, x_k^{(l)}$,

$\cdots$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中基本列，从而 $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^{(0)}$. 记 $x^{(0)} = \{x_1^{(0)}, \cdots, x_j^{(0)}, \cdots\} \in s$. 取 m 充分大使 $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，则 $d(x^{(n)}, x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|} \leqslant \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| + \frac{\varepsilon}{2}$，由 $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^{(0)} (1 \leqslant k \leqslant m)$ 知 $\exists N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，$|x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{2m} (1 \leqslant k \leqslant m)$，故 $d(x^{(n)}, x^{(0)}) < \frac{m\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.　**8.** 提示：充分性显然. 必要性. 取 $x_n \in F_n (n = 1, 2, \cdots)$，则 $m > n$ 时，$x_m \in F_m \subset F_n$，$d(x_m, x_n) \leqslant D_n \to 0 (m, n \to \infty)$，$\{x_n\}$ 为基本列，由 X 完备得 $x_n \to x_0 \in X$，证明 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

习题 2.4　**1.** 提示：证明 $f(A)$ 是 Y 中自列紧集，即对 $f(A)$ 中任一点列 $\{y_n = f(x_n)\}$，有收敛于 $f(A)$ 中的子列，其中 $\{x_n\}$ 是 A 中点列.　**2.** 提示：A 是全有界集，A 有有限 $\frac{\varepsilon}{2}$ - 网 $B = \{x_1, \cdots, x_n\}$，即 $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \frac{\varepsilon}{2})$，若 $B(x_k, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \varnothing$，取 $a_k \in B(x_k, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$. 若 $B(x_k, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A = \varnothing$，则不取元. 这样，在 A 中取出了至多 n 个元 $a_1, a_2, \cdots a_n$（或是 $\{a_1, \cdots a_n\}$ 的一个子集），证明 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 是 A 的 ε - 网.　**3.** 提示：采用反证法，若 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$，则 $X = (\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，得 $\{F_1, \cdots, F_n, \cdots\}$ 是 X 的开覆盖，由 X 是紧空间，得 $\{F_1, \cdots, F_n, \cdots\}$ 有有限子覆盖：$F_{n_1}, \cdots, F_{n_k}$，不妨设 $F0_{n_1} \supset F_{n_2} \supset \cdots \supset F_{n_k}$，则 $F_{n_1} \subset \cdots \subset F_{n_k}$，$\Rightarrow X = F_{n_k} \Rightarrow F_{n_k} = \varnothing$.　**4.** 提示：$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 是 X 中闭集，再证 F 是列紧集. $M = \bigcup_{n=1}^{n} F_n$ 是闭集，再证 M 是列紧集.

5. (1) 记 $d_0 = d(F_1, F_2)$. 由下确界性质，对 $\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists x_n, y_n : x_n \in F_1$，$y_n \in F_2$，使 $d_0 \leqslant d(x_n, y_n) \leqslant d_0 + \frac{1}{n}$，由 F_1 是自列紧集，$\{x_n\}$ 有收敛于 F_1 中的子列 $\{x_{n_k}\}$. 对 $\{y_{n_k}\}$，由 F_2 是自列紧集，$\{y_{n_k}\}$ 有收敛于 F_2 中的子列 $\{y_{n_{k_j}}\}$. 再由 $d_0 \leqslant d(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \leqslant d_0 + \frac{1}{n_{k_j}}$，令 $j \to \infty$ 得 $d_0 \leqslant d(x_0, y_0) \leqslant$

d_0,其中$\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_{k_j}} = x_0 \in F_1$,$\lim\limits_{j\to\infty}y_{n_{k_j}} = y_0$.(2) 利用(1)的结论. **6.** 在 $\boldsymbol{R}^2$ 中取 $F_1 = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x^2+1}, x \geqslant 0\}$,$F_2 = \{(x,0) \mid x \geqslant 0\}$.证明 F_1、F_2 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中闭集,且 $d(F_1,F_2) = 0$.当 F_1 是紧集时,$d(F_1,F_2) > 0$(这里 F_2 是闭集,$F_2 \cap F_1 = \varnothing$).可采用反证法,若 $d(F_1,F_2) = 0$,则 $\exists x_n \in F_1, y_n \in F_2$,使 $0 \leqslant d(x_n,y_n) \leqslant \frac{1}{n}$,由 F_1 是自列紧集,有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k} = x_0 \in F_1$,则当 k 充分大时,$0 \leqslant d(x_0,y_{n_k}) \leqslant d(x_0,x_{n_k}) + d(x_{n_k},y_{n_k}) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n_k} < \frac{2}{n}$,由此可知 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k} = x_0$,由 F_2 闭,知 $x_0 \in F_2$,$x_0 \in F_1 \cap F_2$.矛盾. **7.** 可仿第一章定理 2.17 的证明,也可采用如下证明:设 F 是 (X,d) 中紧集,$f: X \to \boldsymbol{R}$,f 在 F 上连续.则 $\forall \varepsilon > 0$,对每个 $x \in F$,$\exists \delta_x > 0$,当 $y \in F$,$d(x,y) < \delta_x$ 时,$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$,令 $\mathscr{W} = \{B(x,(\frac{\delta_x}{2})) \mid x \in F\}$,$\mathscr{W}$ 是 F 的开覆盖,它有有限子覆盖,记为 $\{B(z_i,\frac{\delta_{z_i}}{2}) \mid i = 1,2,\cdots,n\}$.令 $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{z_1}}{2},\cdots,\frac{\delta_{z_n}}{2}\right\} > 0$,$\forall x_1,x_2 \in F$,当 $d(x_1,x_2) < \delta$ 时,由 $\left\{B(z_1,\frac{\delta_{z_1}}{2}),\cdots,B(z_n,\frac{\delta_{z_n}}{2})\right\}$ 覆盖 F,必存在 $B(z_k,\frac{\delta_{z_k}}{2})$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$,使 $x_1 \in B(z_k,\frac{\delta_{z_k}}{2})$.$d(x_1,z_k) < \delta_{z_k}$,故 $|f(x_1) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$,$d(x_2,z_k) \leqslant d(x_1,z_k) + d(x_1,x_2) < \frac{\delta_{z_k}}{2} + \delta \leqslant \frac{\delta_{z_k}}{2} + \frac{\delta_{z_k}}{2} = \delta_{z_k}$,故 $|f(x_2) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$.由此 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(z_k)| + |f(z_k) - f(x_2)| < \varepsilon$.
8. 提示:见本节第 1 题的提示.

习题 2.5 **1.** 提示:证明 $\forall y = f(x) \in f(X)$,$f(A)$ 中有点列 $\{y_n = f(x_n)\}$(其中 $x_n \in A$),$\{y_n\}$ 收敛于 y. **2.** 提示:由 A 可分,存在 X 中至多可数子集 $\{x_k \mid k \in I, I$ 为至多可数指标集$\}$,对任何自然数 n,当 $A \cap B\left(x_k,\frac{1}{n}\right) \neq \varnothing$ 时,取一个点 $y_{n,k}$,当 $A \cap B\left(x_k,\frac{1}{n}\right) = \varnothing$,不取点.令 A_1

$=\bigcup_{k\in I}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{y_{n,k}\})$,则 A_1 是 A 的至多可数子集.余下证明 A_1 在 A 中稠密.

3. 令 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$,事实上 G 在 X 中稠密.证明如下:$\forall x_0\in X,\forall\varepsilon>0$,由于 G_1 在 X 中稠密,故 $\exists x_1\in G_1\cap B\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$.由于 G_1 是开集,故 $G_1\cap B\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$是开集,$x_1$ 是 $G_1\cap B\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$的内点,可取 $\delta_1>0$,δ_1 充分小,使 $B(x_1,\delta_1)\subset G_1\cap B\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$,$\overline{B}\left(x_1,\frac{\delta_1}{2}\right)\subset B(x_1,\delta_1)\subset G_1\cap B\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$.由 G_2 在 X 中稠密,故 $\exists x_2\in G_2\cap B\left(x_1,\frac{\delta_1}{2}\right)$,可取 $\delta_2>0$,δ_2 充分小,且 $\delta_2<\frac{\delta_1}{2}$,使 $B(x_2,\delta_2)\subset G_2\cap B\left(x_1,\frac{\delta_1}{2}\right)$,$\overline{B}\left(x_2,\frac{\delta_2}{2}\right)\subset B(x_2,\delta_2)\subset G_2\cap B\left(x_1,\frac{\delta_1}{2}\right)\subset\overline{B}\left(x_1,\frac{\delta_1}{2}\right)$,如此继续下去,可得一闭球套:$\overline{B}\left(x_1,\frac{\delta_1}{2}\right)\supset\overline{B}\left(x_2,\frac{\delta_2}{2}\right)\supset\cdots\supset\overline{B}\left(x_n,\frac{\delta_n}{2}\right)\supset\cdots$,$\delta_n<\frac{\delta_{n-1}}{2}$,$\delta_n\to0(n\to\infty)$.由 X 完备,$\exists x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}\left(x_n,\frac{\delta_n}{2}\right)\subset B(x_1,\delta_1)\subset B(x_0,\varepsilon)$,对每个 n,$x\in\overline{B}\left(x_n,\frac{\delta_n}{2}\right)\subset B(x_n,\delta_n)\subset G_n\cap B\left(x_{n-1},\frac{\delta_{n-1}}{2}\right)$,即有 $x\in G_n(n=1,2,\cdots)$,$x\in G$.亦即 x_0 的任意邻域 $B(x_0,\varepsilon)$ 中含 G 的点,从而 G 在 X 中稠密.

习题 3.1 **1.** 按定义验证. **2.** 由范数三角不等式推证. **3.** 利用三角不等式证明. **4.** 按定义验证. **5.** 利用积分性质,按定义验证. **6.** 按定义验证. **7.** 由闭集定义及范数的连续性证明. **8.** 由定义证明. **9.** 利用 T 的线性性与连续定义证明. **10.** 提示:$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{x}{\|x\|}\right\|=\frac{1}{\|x_n\|\|x\|}\|(x_n-x)\|x\|+(\|x\|-\|x_n\|)x\|\leqslant\frac{1}{\|x_n\|\|x\|}(\|x_n-x\|\|x\|+|\|x\|-\|x_n\||\|x\|)\to0\quad(n\to\infty)$. **11.** 提示:$\|\lambda_nx_m-\lambda x\|=\|\lambda_n(x_m-x)+(\lambda_n-\lambda)x\|\leqslant|\lambda_n|$

$\| x_m - x \| + | \lambda_n - \lambda | \| x \| \to 0 \ (n, m \to \infty)$. **12.** 提示：证明$\{S_n\}$为$X$中Cauchy列. **13.** 按线性算子的定义验证.

习题 3.2 **1.** 由定义验证$N(T)$是线性子空间及闭集. **2.** $\| T \| = 3$(参见例2.9). **3.** 提示：因A是实对称矩阵，故存在正交阵U，使得$U^T AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \triangleq \Lambda$，其中$\lambda_i \in \mathbf{R}(i = 1,2,\cdots,n)$，从而$\| T \| = \sup\limits_{\| x \|_2 = 1} \| Ax \|_2 = \sup\limits_{\| x \|_2 = 1} \sqrt{x^T A^T Ax} = \sup\limits_{\| x \|_2 = 1} \sqrt{x^T U \Lambda^2 U^T x} = \sup\limits_{\| y \|_2 = \| U^T x \|_2 = 1} \sqrt{\lambda_1^2 y_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 y_n^2} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} | \lambda_i |$. **4.** (1) 按定义验证；(2) $\| T \| = 1$. **5.** 按定义验证. **6.** 由$\| T^n \| \leqslant \| T \|^n$即知. **7.** (1) 按定义验证；(2) 对$\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$，由$\| (T_n - I)x \|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} | x_k |^2} \to 0$知$T_n \xrightarrow{S} I$. 另一方面，对$\forall n \geqslant 1$，$\| T_n - I \| = 1$，故$\{T_n\}$不按范数收敛于$I$. **8.** 提示：$\dim R(T) < +\infty$，$T$是有限秩算子. **9.** 由紧算子的定义证明. **10.** 用反证法，由紧算子的性质会得出Y是有限维空间的结论. **11.** 由T的连续性及列紧集的定义证明. **12.** 提示：利用代数变形及三角不等式证明.

习题3.3 **1.** $\| f \| = 1$. **2.** 按定义验证. **3.** 提示：易证$f \in (C[a, b])^*$且$\| f \| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} | a_i |$. 为求$\| f \|$，可取$x_0(t) \in C[a,b]$使得$x_0(t_i) = \mathrm{sgn} a_i (i = 1,2,\cdots,n)$且$\| x_0 \| = 1$，这样便有$f(x_0(t)) = \sum\limits_{i=1}^{n} | a_i |$，由此可证$\| f \| = \sum\limits_{i=1}^{n} | a_i |$. **4.** $\| f \| = \dfrac{b - a}{2}$. **5.** 按定义验证. **6.** $\| f \| = 1$. **7.** 提示：设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$为$X$的一个基，对每一$i(1 \leqslant i \leqslant n)$，定义$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, j \neq i, \\ 1, j = i, \end{cases} (j = 1,2,\cdots,n)$，可以证明$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$为$X^*$的一个基，从而有$\dim X^* = n$.

习题3.4 **1.** 提示：令$L = \{x + kx_0 \mid \forall x \in M, \forall k \in \mathbf{K}\}$，$L$为$X$的

线性子空间，定义 L 上的线性泛函 $g(x+kx_0)=kd$，由 d 的定义可证 g 为 L 上的有界线性泛函，而且 $\|g\|\leqslant 1$，当 $x\in M$ 时，$g(x)=0$. 另一方面，由 d 的定义，存在 $\{x_n\}\subset M$，使 $\|x_0-x_n\|\to d$，从而 $\|g\|\geqslant\frac{|g(x_0-x_n)|}{\|x_0-x_n\|}$ $=\frac{d}{\|x_0-x_n\|}(n=1,2,\cdots)$，令 $n\to\infty$ 得 $\|g\|\geqslant 1$，故 $\|g\|=1$，由 Hahn－Banach 定理，存在 $G\in X^*$，使 $x\in M$ 时，$G(x)=0,G(x_0)=d$，$\|G\|=1$. 令 $f=\frac{1}{d}G$，则 f 满足题中要求. **2.** 提示：用反证法，利用 Hahn－Banach 定理的推论. **3.** 用反证法，由共鸣定理会得出矛盾. **4.** 提示：对每一 $n\geqslant 1$，定义 $x_n^{**}(f)=f(x_n)(\forall f\in X^*)$，可证 $\{x_n^{**}\}\subset X^{**}$，且有 $\|x_n^{**}\|=\|x_n\|\quad(n=1,2,\cdots)$，对 $\{x_n^{**}\}$ 用共鸣定理. **5.** 提示：必要性. 易证 $N(T)=\{\theta\}$，由 $K\|x_n-x_m\|\leqslant\|Tx_n-Tx_m\|$，利用 X 的完备性及 T 的连续性证明 $\overline{R(T)}=R(T)$. 充分性. 用 Banach 逆算子定理说明 $T^{-1}:R(T)\to X$ 为有界线性算子，从而存在 $m>0$，使 $\|T^{-1}y\|\leqslant m\|y\|$ 对 $\forall y\in R(T)$ 成立，由此可证充分性成立. **6.** 按定义验证. **7.** 由习题 3.1 第 13 题知 T^{-1} 是线性算子，利用闭算子的特征验证 T^{-1} 是闭算子. **8.** 易证 $N(T)$ 是 X 的线性子空间，利用 T 是闭算子的特征证明 $N(T)$ 是闭集.

习题 3.5 **1.** 提示：用反证法，利用 $X\subset X^{**}$ 及习题 3.3 第 7 题的结果. **2.** $0^*=0,I^*=I$. **3.** 由 $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$ 即知. **4.** 参见例 5.4. $T^*(y_1,y_2,\cdots)=(y_3,y_4,\cdots)(\forall y=(y_1,y_2,\cdots)\in(l^p)^*=l^q)$，此处当 $p>1$ 时，$q>1$ 且满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，当 $p=1$ 时，$q=\infty$，$l^q=l^\infty$（即有界数列空间）. **5.** 提示：利用 $X\subset X^{**}$ 及习题 3.3 第 7 题的结果.

习题 3.6 **1.** 由弱收敛的定义及数列极限性质即知. **2.** 提示：对 $\forall g\in Y^*$，gT 为 X 上有界线性泛函. **3.** 由弱*收敛的定义及数列极限性质即知. **4.** 方法同上题. **5.** 提示：先证 f 是 X 上线性泛函，再利用共鸣定理说明 $\{\|f_n\|\}$ 是有界集，进而可证 f 是有界线性泛函. **6.** 提示：必要性

易证.充分性.注意到 X 是自反空间,即 $X = X^{**}$,若 $f_n \xrightarrow{W^*} f$,由定义,对 $\forall x \in X, f_n(x) \to f(x)$,即 $x^{**}(f_n) \to x^{**}(f)$,因此作为 X^* 中的点列 $\{f_n\}$,有 $f_n \xrightarrow{W} f$,又因 X^* 是有限维空间,故 $f_n \xrightarrow{S} f$. **7.** 提示:由本章§3知,对 $\forall f \in (l^2)^*$,有 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n)$ $(\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2)$,这里 $(f(e_1), f(e_2), \cdots) \in l^2$,因此有 $f(e_n) \to f(\theta) = 0$,即 $e_n \xrightarrow{W} \theta$,但 $\| e_n - \theta \| = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$,故 $e_n \overset{S}{\not\to} \theta$.

习题 3.7 **1.** $\sigma(0) = \{0\}, \sigma(I) = \{1\}$. **2.** 提示:证明 $\overline{R(0I - T)} \neq C[a, b]$. **3.** 提示:利用定理7.1. **4.** 提示:利用上题结果. **5.** $\sigma(T) = [0, 1]$ (参见例7.4). **6.** 提示:(1) 对 $\forall n \geqslant 1$,定义 $T_n : l^2 \to l^2$ 为 $T_n x = \left(\frac{x_2}{1}, \frac{x_3}{2}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{n}, 0, 0, \cdots\right)$ $(\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2)$,则 T_n 是有限秩算子,从而是紧算子,再证 $\| T_n - T \| \to 0$,由本章定理2.10即知 $T \in C(l^2)$; (2) 由点谱的定义证明.

习题 4.1 **1.** 取 $z = x - y$,由内积定义即知. **2.** 提示: $|(x_n, y_m) - (x, y)| = |(x_n, y_m) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \leqslant \| x_n \| \| y_m - y \| + \| x_n - x \| \| y \| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. **3.** 由 $\| x_n - x \|^2 = (x_n - x, x_n - x)$ 按内积展开即知. **4.** 提示:充分性易证.必要性.由假设可得 $(x, y) = \| x \| \| y \|$,由 $\| y - \lambda x \|^2 = (y - \lambda x, y - \lambda x)$ 按内积展开,可知当 $\lambda = \frac{\| y \|}{\| x \|}$ 时,便有 $y = \lambda x$. **5.** 在 $(\boldsymbol{R}^n, \| \cdot \|_\infty)$ 中找两个点 x_0, y_0 使平行四边形公式不成立. **6.** 方法同上题. **7.** 按内积展开即可. **8.** 提示:因 $M \subset \overline{M}$,故 $(\overline{M})^\perp \subset M^\perp$.另一方面,由闭包的定义及内积的连续性可证 $M^\perp \subset (\overline{M})^\perp$. **9.** 提示:因 H 是Hilbert空间,$M, M^\perp$ 都是 H 的闭线性子空间,故由投影定理,有 $H = M \oplus M^\perp$ 及 $H = M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp$,由此可得 $M = (M^\perp)^\perp$. **10.** 由定义证明,利用Parseval等式. **11.** 提示:记 $x_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$,先证 $x - x_0 \perp x_0 - x_1$,再由 $\| x - x_1 \|^2 = \| x - x_0 + x_0 -$

$x_1\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - x_1\|^2 \geqslant \|x - x_0\|^2$ 即知. **12.** 提示:在平形四边形公式 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ 中,令 $x = \frac{x_n}{2}$, $y = \frac{x_m}{2}$ 代入得 $\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$,利用 $\|x_n\| \to d$ 及 M 的凸性可证 $\|x_n - x_m\| \to 0\ (n,m \to \infty)$,故$\{x_n\}$为 H 中 Cauchy 列,由 H 的完备性得证. **13.** 提示:设 x_0 是 x 在 M 上的投影,则 $x_0 \in M, x - x_0 \perp M$. 对 $\forall y \in M$,由于 $x - y = (x - x_0) + (x_0 - y)$ 及 $x - x_0 \perp x_0 - y$,得 $\|x - y\|^2 \geqslant \|x - x_0\|^2$,由此可证 $\|x - x_0\| = \inf\limits_{y \in M}\|x - y\|$.

习题 4.2 **1.** $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$,其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{C}^n$. **2.** $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$,其中 $x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$. **3.** $F(f) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$,其中 $f, g \in L^2[a,b]$. **4.** 利用 F.Riesz 表示定理证明. **5.** 提示:必要性易证. 充分性. 由上题知,对 $\forall y \in H$,有$(x_n, y) \to (x, y)$,特别地,有$(x_n, x) \to (x, x)$,再按内积展开 $\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x)$,可知 $\|x_n - x\| \to 0$. **6.** 提示:按定义验证 H^* 成为内积空间. 至于完备性,设$\{Fu_n\} \subset H^*$ 为 Cauchy 列,由 $\|Fu_n - Fu_m\| = \|u_n - u_m\|$ 知$\{u_n\} \subset H$为Cauchy列,因 H 完备,故存在 $u_0 \in H$,使 $\|u_n - u_0\| \to 0$,从而 $\|Fu_n - Fu_0\| \to 0$,因此 H^* 是完备的.

习题 4.3 **1.** $I^* = I, 0^* = 0$. **2.** $T^*x = (x_2, x_3, \cdots)(\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2)$. **3.** $T^*x = (\bar{\alpha}_1 x_3, \bar{\alpha}_2 x_4, \cdots)\ (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2)$. **4.** 提示:按内积展开 $\|Sx\|^2 = (Sx, Sx)$. **5.** 由定义验证. **6.** 由定义验证. **7.** 提示:必要性. 对 $\forall x \in H, ((T^* + T)x, x) = 2\mathrm{Re}(Tx, x)$. 充分性. 由假设及前式知对 $\forall x \in H$,有$((T^* + T)x, x) = 0$,因 H 是复 Hilbert 空间,上式等价于 $T^* + T = 0$,即 $T^* = -T$. **8.** 提示:由正则点的定义及伴随算子的性质,先证明$\{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \rho(T)\} \subset \rho(T^*)$,再以 T^* 代替式中的 T,得$\{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \rho(T^*)\} \subset \rho(T)$,由此两边取复共轭,得 $\rho(T^*) \subset \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in$

$\rho(T)\}$,因此 $\rho(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \rho(T)\}$. 再由谱与正则集的关系即知 $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$

习题4.4 **1.** 提示:由投影算子及正交性的定义证明. **2.** $\| U \| = 1$. **3.** 由定义验证. **4.** 由定义验证. **5.** 由定义验证. **6.** 提示:先求出 $T^* x = (\bar{\alpha}_1 x_1, \bar{\alpha}_2 x_2, \cdots)$ ($\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$),由此可知 $T^* Tx = TT^* x$. **7.** 由定义验证. **8.** 由定义验证. **9.** 提示:因 T 是正常算子,故对 $\forall x \in H$,有$(T^{n+1}x, T^{n+1}x) = (T^n x, T^* T^{n+1}x) = (T^n x, TT^* T^n x) = (T^* T^n x \ , T^* T^n x)$,由此可得 $\| T^{n+1} \| = \| T^* T^n \|$. **10.** 由定义验证.

习题4.5 **1.** 参照定理5.4的证明. **2.** 参照定理5.6的证明. **3.** 提示:由点谱的定义可证明$\{\alpha_n\} \subset \sigma_p(T)$. 因 $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ 且 $\sigma(T)$ 是闭集,故$\overline{\{\alpha_n\}} \subset \sigma(T)$,由此可知当$\overline{\{\alpha_n\}} = [a,b]$时,有$[a,b] \subset \sigma(T)$(事实上,$T$是自伴算子,由自伴算子的谱性质,此时有 $\sigma(T) = [a,b]$). **4.**(1) 提示:易知 T 是自伴算子, 对 $\forall n \geqslant 1$, 令 $T_n x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots, \alpha_n x_n, 0, 0, \cdots)$($\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$), 则 $\{T_n\}$ 是紧算子列, 且有 $\| T_n - T \| \to 0 (n \to \infty)$,由紧算子列的性质知 T 是紧算子;(2) $\sigma_p(T) = \{\alpha_n\}$, $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

习题5.1 **1.** X 不完备. **2.** 证明 $C(\Delta^+)$ 的完备性时利用连续函数空间在通常定义的范数下的完备性;考虑 $C(\Delta^+)$ 上的子空间

$$D = \{y(\cdot) \mid y(\cdot) \in C(\Delta^+), \ | y(x) - y_0 | \leqslant b \ (x \in \Delta^+)\}$$

及其上的算子 T:

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) \mathrm{d}s \quad (x \in \Delta^+),$$

证明 T 是D 到D 的压缩映射. **3.** 在 $C[a,b]$ 中作映射 T:

$$T\varphi = \varphi - \frac{1}{M} f(x, \varphi),$$

并利用微分中值定理证明 T 是$C[a,b]$到 $C[a,b]$的压缩映射. **4.** 首先证明 $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 满足 $\varphi'(\bar{x}) = 0$,从而由 $\varphi'(x)$ 的连续性确定 $U(\bar{x})$ 使当 $x \in U(\bar{x})$ 时, $| \varphi'(x) | \leqslant L < 1$. 再证明 φ 是$U(\bar{x})$ 到 $U(\bar{x})$ 的压缩

映射． **5.** 在 $C[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上定义映射 T：

$$(Ty)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))\mathrm{d}s,$$

证明 T 是 $C[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 到 $C[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 的压缩映射． **6.** 在 $C[a,b]$ 上定义映射 T：

$$(T\varphi)(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

证明 T 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的压缩映射． **7.** 在 $C[a,b]$ 上定义映射 T：

$$(T\varphi)(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

并证明当 $|\lambda|<\dfrac{1}{L(b-a)}$ 时，T 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的压缩映射．

习题5.2 **1.** (1) f 不满足映 $[0,1]$ 入 $[0,1]$；(2) $f(x)$ 不连续；(3) 圆环 S 不是凸集． **2.** 先证明映射 $T:C[0,1]\to C[0,1]$

$$(T\varphi)(x)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-sx}\cos(\lambda\varphi(s))\mathrm{d}s$$

是紧算子；其次考虑集合 $S=\{\varphi\mid \|\varphi\|\leqslant 1,\varphi\in C[0,1]\}$，证明 $T:S\to S$．
3. 先证明映射 $T:C[a,b]\to C[a,b]$

$$(Ty)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))\mathrm{d}s$$

是紧算子；其次选取 h 充分小使其满足 $Mh<1$，并考虑空间 $C[x_0-h,x_0+h]$ 上的集合 $S=\{y\mid y\in C[x_0-h,x_0+h]$ 且 $\|y-y_0\|\leqslant\dfrac{Mh}{1-Mh}\}$，证明 $T:S\to S$． **4.** 证明算子 $T:C[a,b]\to C[a,b]$

$$(T\varphi)(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s$$

在闭球 $B=\{\varphi\mid \|\varphi\|\leqslant h,\varphi\in C[a,b]\}$ 上满足定理2.3的条件． **5.** 类似于例2.4．

习题5.3 **1.** (1) $\varphi(x)=e^x+e-1$；

(2) 当 $|\lambda|<\dfrac{2}{e^2-1}$ 时有惟一解 $\varphi(x)=x-\dfrac{2\lambda e^x}{2+\lambda(e^2-1)}$． **2.** 直接用定义证明． **3.** 参考例3.2：(1) 特征值 $\lambda_1=\dfrac{2}{\pi}$，相应特征函数 $\varphi_1(x)$

$= \frac{2\sin x}{\pi}$；(2) 特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{e^2-1}$，相应特征函数 $\varphi_1(x) = \frac{1}{e^2-1}e^x$． **4.** 为求特征值与特征向量，将积分方程化为 $\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0, \\ \varphi(0) = 0, \varphi'(1) = 0, \end{cases}$ 从而求出所有特征值 $\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\pi^2 (k = 1,2,\cdots)$ 及所有标准正交的特征函数 $\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}x$；非齐次积分方程的解为($\lambda$ 不取特征值)

$$\varphi(x) = \cos\frac{\pi}{2}x + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{2}}{(2n-1)\pi}\left(\frac{1}{(4n-3)^2\pi^2-4\lambda}\varphi_{2n-1}(x) + \frac{1}{(4n-1)^2\pi^2-4\lambda}\varphi_{2n}(x)\right).$$

习题5.4 **1.** 由范数的三角不等式可证 $F(c)$ 是连续函数；由 $\varphi_i(i = 1, 2,\cdots,n)$ 的线性无关性及范数的三角不等式可证 $p(c)$ 是 $\boldsymbol{K}^n$ 上的一个范数. **2.** 用反证法. **3.** (1) 由范数的正齐次性和三角不等式证明；(2) 由定义即知. **4.** 类似例 4.7，结果是 $3x^3 + x^2 - \frac{9}{8}$. **5.** $a = 0.6644389, b = 0.1147707$. **6.** $a = 22.25376100, b = -7.855047781$.

参 考 书 目

[1] 吉田耕作著,吴元恺等译. 泛函分析. 北京:人民教育出版社,1980

[2] 夏道行,吴卓人,严绍宗,舒五昌编著. 实变函数论与泛函分析(上,下册). 北京:高等教育出版社,1985

[3] E. Kreyszig. Introductory Functional Analysis with Applications. New York: John Wiley & Sons, 1978

[4] 张恭庆,林源渠编著. 泛函分析讲义(上册). 北京:北京大学出版社,1987

[5] 郑维行,王声望编. 实变函数与泛函分析概要(第一,二册). 北京:人民教育出版社,1980

[6] 程其襄等编. 实变函数与泛函分析基础. 北京:高等教育出版社,1983

[7] 刘树琪等编译. 泛函分析入门及题解. 天津:天津科学技术出版社,1988

[8] 陈景良. 近代分析数学概要. 北京:清华大学出版社,1987

[9] 龚怀云等. 应用泛函分析. 西安:西安交通大学出版社,1985

[10] 葛显良编著. 应用泛函分析. 杭州:浙江大学出版社,1996

[11] 李大华. 应用泛函简明教程. 武汉:华中理工大学出版社,1989

[12] 周肇锡等编著. 应用泛函分析基础. 西安:西北工业大学出版社,1996

[13] 陈传璋等著. 积分方程论及其应用. 上海:上海科学技术出版社,1987

[14] D. R. Smart 著,张石生等译. 不动点定理. 重庆:重庆出版社,1982

[15] 张石生著. 不动点理论及应用. 重庆:重庆出版社,1984

[16] 赖家镛,陈文鹏,李卫军,王公宝编. 现代数学基础教程. 武汉:海军工程学院,1993

后　记

海军工程大学为工科研究生开设应用泛函分析课程已有十几年时间，其间使用过多种不同版本的教材以及自编讲义。本书是在原有讲义的基础上，结合十多年来我们讲授这门课程的一些教学经验和体会，同时注意吸收同类教材的优点，重新组织编写而成。

承蒙武汉大学数学与计算机科学学院刘培德教授主审本书并作序，对他的鼓励和建议以及宝贵的修改意见，我们表示衷心的感谢。南京大学数学系马吉溥教授、宋国柱教授和华中科技大学数学系郑权教授对本书的编写工作给予了热情指点与帮助，在此一并表示谢意。

本书的编写出版得到了海军工程大学研究生处陈少昌处长的大力支持和帮助，王大华教授、动力学院徐连营副院长、动力学院训练部郭尚芬部长对本书的编写工作给予了许多帮助和鼓励，海军工程大学基础部领导、数学教研室领导和同事们自始至终给予我们以关心、支持和帮助，借此机会向他们表示诚挚的谢意。

本书第一、二章由李卫军编写，第三、四章由王公宝编写，第五章由何汉林编写，全书由王公宝负责统稿工作。限于编者的学识水平，书中疏漏、不妥之处在所难免，恳请专家、读者不吝指正。

编　者

2000 年 6 月